Začetni problem PDE

20. 4. 2022

Parcialne diferencialne enačbe (PDE)

Današnja naloga: Numerično rešiti diferencialne enačbe v katerih nastopajo parcialni odvodi več kot ene neodvisne spremenljivke.

Zanimale nas bodo predvsem linearne PDE drugega reda, ki jih v splošnem zapišemo kot:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + c\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial t} + fu = Q$$

Z reševanjem enačbe iščemo skalarno funkcijo $u(x,t)$ na območju v ravnini (x,t) ob danih začetnih in robnih pogojih.

Označimo: Parcialne odvode označimo z uporabo indeksov za lažje delo:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{tx} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Dobimo: $a u_{xx} + b u_{xt} + c u_{tt} + d u_x + e u_t + f u = Q$

Linearne PDE razdelimo na tri kategorije glede na vrednost diskriminante $D = b^2 - 4ac$:

- **Hiperbolične enačbe ($D > 0$):**

Takšne enačbe opisujejo časovno odvisne konzervativne procese, ki se ne razvijajo proti stacionarnemu stanju. Takšna enačba je valovna enačba, ki opisuje širjenje valov

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t)$$

- **Parabolične enačbe ($D = 0$):**

Takšne enačbe opisujejo časovno odvisne disipativne procese, ki vodijo v ravnovesno stanje. Primer takšne enačbe je difuzijska enačba:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,t) \quad \text{oz.} \quad u_t = D u_{xx} + g(x,t)$$

- **Eliptične enačbe ($D<0$):**

Takšne enačbe opisujejo sisteme v ravnovesnih ali stacionarnih stanjih, njihove rešitve pa so navadno takšne, da minimizirajo energijo sistema. Primer takšne enačbe je Poissonova enačba.

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$$

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$$

<u>Za več glej:</u>

- Širca, RMF, poglavje 9.
- Plestenjak, Raz. uvod v numerične met., poglavje 13.
- Vodre, MAFI, poglavje 5.
- Zalar, Uvod v numerične metode, pogl. 7.4.

Opomba: Mi se bomo ukvarjali z reševanjem hiperboličnih in paraboličnih PDE.

Difuzijska enačba – prevajanje toplote

Obravnavajmo širjenje toplote v 1D plasti z debelino L (to pomeni, da je v ostalih dimenzijah plast tako razsežna, da ne vpliva na profil), npr. stena velike sobe

Gostota toplotnih izvorov v plasti, ki jo merimo v $\frac{W}{m}$ označimo z q. Temperatura $T(x,t)$ na različnih mestih plasti v odvisnosti od časa določa difuzijska enačba:

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q(x)}{\rho c_p} \; ; \; 0 \leq x \leq L}$$

$$D = \frac{\lambda}{\rho c_p}$$

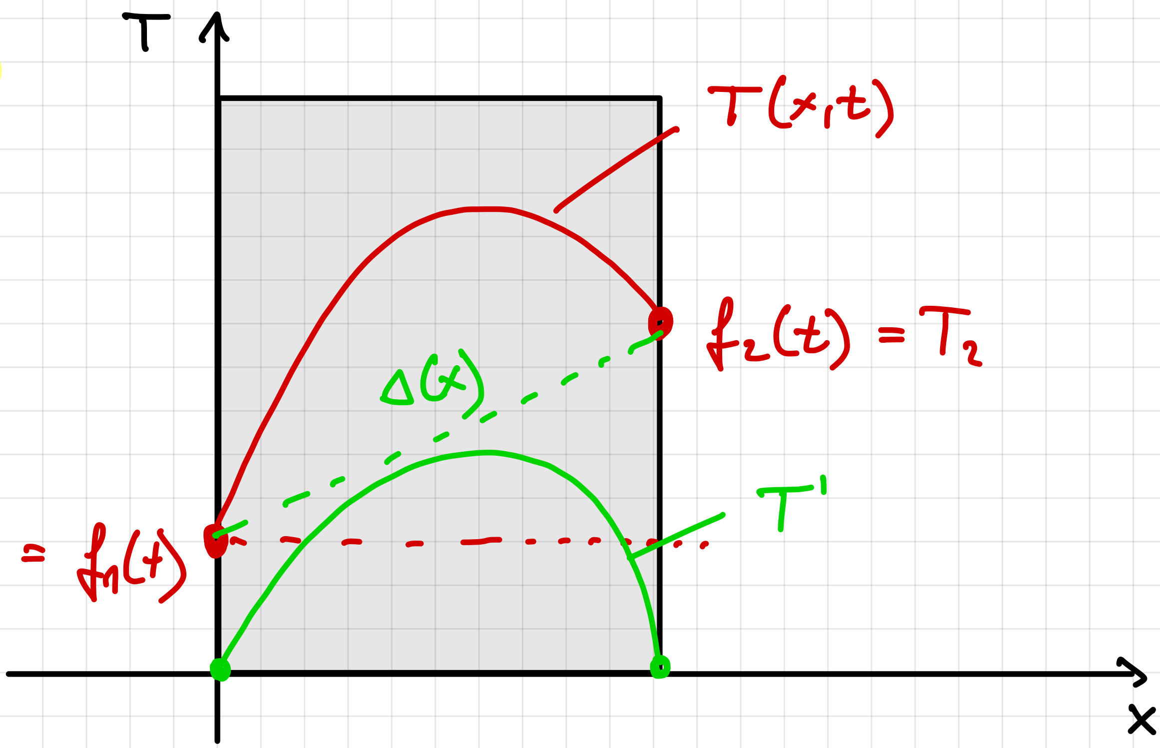
$\lambda \equiv$ specifična prevodnost
$\rho \equiv$ gostota
$c_p =$ specifična toplota

Da bo rešitev točno določena moramo navesti še začetni pogoj, ki določa temperaturni profil ob času $t=0$ in robne pogoje, ki določata temperaturo plasti na robovih pri $x=0$ in $x=L$:

$$T(x, t=0) = g(x)$$ ← Začetni pogoj (Samo en, ker 1. odvod v času)

$$T(x=0, t) = f_1(t)$$
$$T(x=L, t) = f_2(t)$$
Dirichletova robna pogoja

t:



Konstantni robni pogoji:

Če imamo konstantne robne pogoje: $f_1(t) = T_1$ in $f_2(t) = T_2 = \text{konst.}$, potem uvedemo linearno transformacijo $\Delta(x)$ s katero naš problem prevedemo na problem s homogenimi Dirichletovimi robnimi pogoji:

$$T(x,t) = T'(x,t) + \Delta(x)$$

$$= T'(x,t) + \underbrace{\left(T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x\right)}_{\Delta(x)}$$

Ker velja:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T'}{\partial t} + 0 \quad \text{(ni odvisna od časa)}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + 0 \quad \text{(je linearna funkcija } x\text{)}$$

naš problem dobi obliko:

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{q(x)}{\rho c_p} \; ; \; 0 \leq x \leq L,$$

$$T'(x, t=0) = g(x) - \Delta(x)$$

$$\left.\begin{aligned} T(x=0,t) &= 0 \\ T(x=L,t) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ Homogena Dirichletova robna pogoja.}$$

Da se ognemo težav z enotami uvedemo brezdimenzijske spremenljivke: ξ, τ in $u(\xi,\tau)$

$$x = \xi \cdot L \quad , \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

$$t = \tau \cdot t_0 \quad , \quad 0 \leq \tau \leq 1$$

↳ Izbran čas integracije.

$$T' = u \cdot T_0$$ ← Izbrana skala. $\neq 0$ npr. določena iz stacionarnih pogojev.

<u>Dobimo:</u>

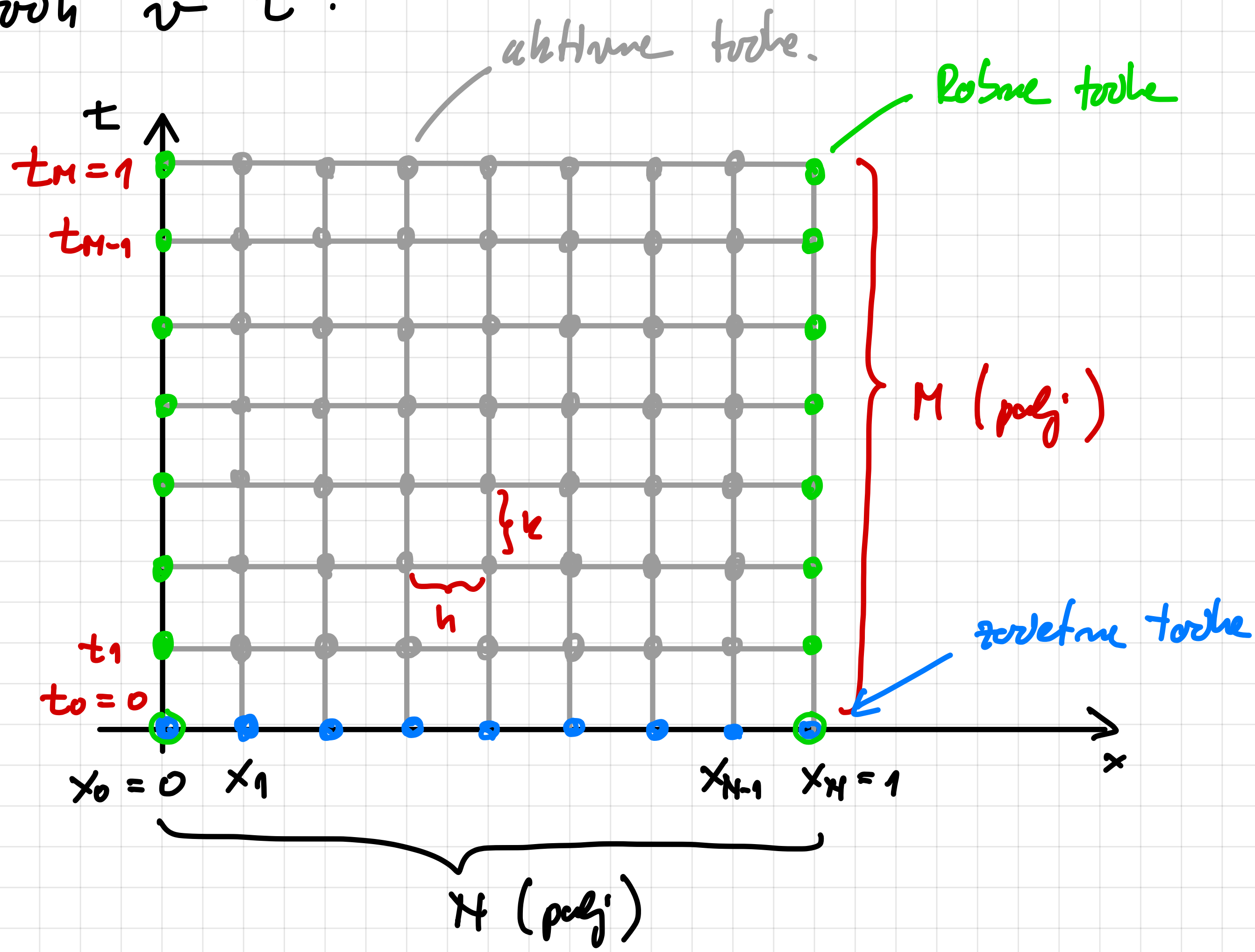
$$\frac{T_0\,\partial u}{\partial \tau} = \underbrace{\frac{t_0 D}{L^2}}_{D'} T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \underbrace{\frac{g(x)\, T_0}{\rho c_p T_0}}_{Q} \Bigg/ : T_0$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} &= D' \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + Q(\xi), \quad 0 \le \xi \le 1 \\ u(\xi, \tau = 0) &= \frac{g(\xi \cdot L) - \Delta(\xi \cdot L)}{T_0} = g'(\xi) \\ u(\xi = 0, \tau) &= 0 \\ u(\xi = 1, \tau) &= 0 \end{aligned}}$$

Tako prepisano difuzijsko enačbo s pripadajočimi začetnimi in robnimi pogoji želimo sedaj **rešiti numerično!**

Postopamo na enak način, kot pri NDE. **Uporabimo diferenčno metodo**, t.j. PDE aproksimiramo s sistemom diferenčnih enačb.

Ravnino $(x,t) = [0,1] \times [0,1]$ razdelimo na ekvidistantno mrežo N točk v x in M točk v t:



Diskretizacija v t in x sta podana z:

$$k = \frac{t_M - t_0}{M} \qquad h = \frac{x_N - x_0}{N}$$

Potem velja:

$$t_i = ik \quad ; \quad i = 0, \ldots, M$$

$$x_j = jh \quad ; \quad j = 0, \ldots, N$$

Vrednosti funkcije v izbranih točkah označimo kot:

$$u(x_j, t_i) = u_{ij}$$

časovni indeks krajevni indeks.

Zapišimo še robne pogoje:

$$u(x_j, t_0) = u_{0j} = g'(x_j) \;;\; j = 0, \dots, N$$

$$\left.\begin{aligned} u(x_0, t_i) &= u_{i0} = 0 \\ u(x_N, t_i) &= u_{iN} = 0 \end{aligned}\right\} \;;\; i = 0, \dots, M$$

Eksplicitna shema: (FTCS)

Časovni odvod aproksimiramo z enostransko diferenco, drugi odvod po kraju pa s simetrično diferenco:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{ij} = \frac{u_{i+1\,j} - u_{ij}}{k} + O(k)$$

?

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{ij} = \frac{u_{i\,j+1} - 2u_{ij} + u_{i\,j-1}}{h^2} + O(h^2)$$

Dobimo:

$$\frac{u_{i+1\,j} - u_{ij}}{k} = D\,\frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{h^2} + Q_{ij} \quad \Big/ \cdot k$$

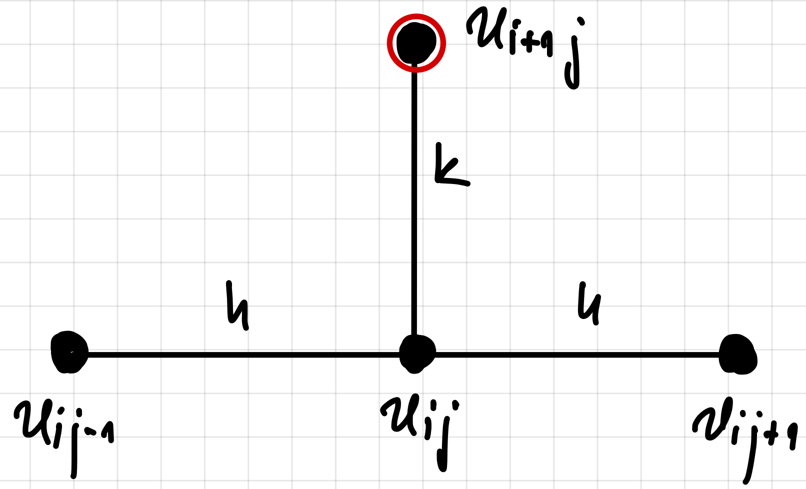
$$u_{i+1\,j} = u_{ij} + \overset{=P}{\frac{kD}{h^2}}\left(u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}\right) + k\,Q_{ij} + O(k+h^2) \qquad (*)$$

Tako računamo člene ob naslednjem času enega po enega!

$i = 0, 1, \dots, M$

$j = 1, \dots, N-1$

Dobili smo shemo, kako iz vrednosti funkcije pri danem času i izračunamo vrednosti ob naslednjem $(i+1)$. Shemo grafično ponazorimo:



Metoda naredi en korak v času naprej s simetrično diferenco, zato ji rečemo: Forward-Time, Centered-Space (FTCS) metoda.

Stabilnost metode:

Hitrost napredovanja metode v času je odvisna od velikosti p. Za majhne p metoda počasi napreduje, za prevelike p pa je metoda nestabilna.

Spomnimo se, tudi eksplicitna Eulerjeva metoda je bila nestabilna, če je bil korak prevelik, tu je reč povsem analogna.

Izkaže se, da se da rešitev homogene diferenčne enačbe (*) $(g=0)$ zapisati v obliki:

to je število točk diskretizacije

$$u_{ij} = \sum_{k=1}^{N} c_k \left(1 - 4p \sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right)\right)^i \cdot \sin j\frac{k\pi}{N+1}$$

koeficienti razvoja

Razvoj po sin ustreza diskretni Fourierovi transformaciji. Vrsta je smiselno navzgor omejena, saj višjih frekvenc kot je točk ne moremo opisati v okviru dane diskretizacijske sheme.

Glej: Egon Zakrajšek, Uvod v numerične metode, str. 108.

Prepričajmo se, da je to res rešitev enačbe:

$$u_{i+1,j} = \sum_{k=1}^{N} c_k \left(1-4p\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right)\right)^{i+1} \sin\frac{jk\pi}{N+1}$$

$$u_{ij} + p\left(u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}\right) = \sum_{k=1}^{N} c_k \left(1-4p\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right)\right)^{i} \cdot$$

$$\left[\sin\frac{jk\pi}{N+1} + \underbrace{p\sin\frac{(j+1)k\pi}{N+1}} - 2p\sin\frac{jk\pi}{N+1} + \underbrace{p\sin\frac{(j-1)k\pi}{N+1}}\right]$$

Po adicijskih izrekih:

$$p\sin\frac{jk\pi}{N+1}\cos\frac{k\pi}{N+1} + \cancel{p\cos\frac{jk\pi}{N+1}}\sin\frac{k\pi}{N+1}$$

Po adicijskih izrekih:

$$p\sin\frac{jk\pi}{N+1}\cos\frac{k\pi}{N+1} - \cancel{p\cos\frac{jk\pi}{N+1}}\sin\frac{k\pi}{N+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} c_k \left(1-4p\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right)\right)^{i} \sin\frac{jk\pi}{N+1} \cdot$$

$$\left[1 + \underbrace{2p\cos\frac{k\pi}{N+1} - 2p}\right]$$

$$\underbrace{2p\cdot\cancel{\cos^2\frac{k\pi}{2(N+1)}} - 2p\sin^2\frac{k\pi}{2(N+1)} - 2p\sin^2\frac{k\pi}{2(N+1)} - \cancel{2p\cos^2\frac{k\pi}{2(N+1)}}}$$

$$1 - 4p\sin^2\frac{k\pi}{2(N+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} c_k \left(1-4p\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right)\right)^{i+1} \sin\frac{jk\pi}{N+1} \qquad \text{q.e.d.}$$

Da bo rešitev omejena, ko gre $j \to \infty$, mora veljati:

$$\left| 1 - 4p \underbrace{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(M+1)}\right)}_{\geq 0} \right| \leq 1$$

Pogoj bo izpolnjen, ko bo: $1 - 4p \geq -1$, od koder dobimo, da mora veljati $p \leq \frac{1}{2}$!

Velja, da je optimalna izbira parametra $p = \frac{1}{6}$. Za dokaz glej Plestenjak, Razširjen uvod v numerične metode, str. 359.

Direktno shemo za računanje vrednosti funkcije z naslednjega časovnega nivoja:

$$u_{i+1,j} = u_{ij} + p\left(u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}\right) + k\,Q_{ij}$$

lahko formalno zapišemo v matrični obliki:

$$\vec{u}_{i+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_{i+1,1} \\ u_{i+1,2} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{i+1,N-1} \end{bmatrix}}, \qquad \vec{u}_i = \begin{bmatrix} u_{i,1} \\ u_{i,2} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{i,N-1} \end{bmatrix} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Prvi in zadnji člen izpustimo, ker $u_{i+1,0} = u_{i+1,N} = 0$.

Dobimo:

$$\vec{u}_{i+1} = \vec{u}_i + p \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ 0 & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}}^{A \text{ (To je enaka matrika kot zadnjič)}} \vec{u}_i + \vec{Q}_i$$

Torej: Temperaturni profil ob naslednjem času $(i+1)k$ dobimo iz profila ob (ik) po formuli:

$$\underbrace{\vec{u}_{i+1} = (\mathbb{1} + pA)\,\vec{u}_i + k\vec{Q}_i}_{\text{Robni pogoji sta skrita v } A.} \quad ; \quad \underbrace{\vec{u}_0 = \vec{g}(\vec{x})}_{\text{začetni pogoj}}$$

Implicitna shema (BTCS):

Podobno kot pri NDE se stabilnost diferenčnih shem za PDE izboljša, če uporabimo implicitno shemo, ki jo dobimo tako, da 2. odvod po kraju izračunamo pri $t = (i+1)k$:

$$u_{i+1,j} = u_{ij} + p\left(u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}\right) + kQ_{ij} + O(k+h^2)$$

Podobno kot prej enačbo zapišemo v matrični obliki:

$$\vec{u}_{i+1} - p\cdot A\,\vec{u}_{i+1} = \vec{u}_i + \vec{Q}_i k$$

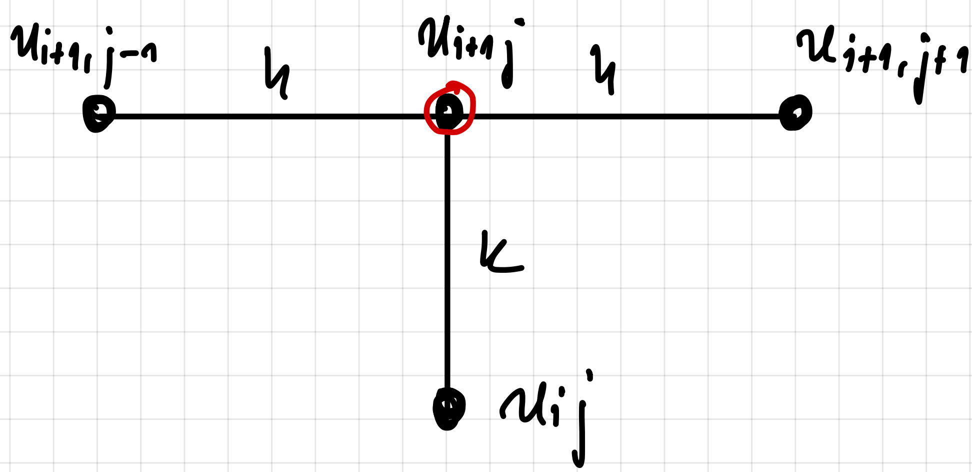
$$\underbrace{(\mathbb{1} - pA)}_{B}\,\vec{u}_{i+1} = \underbrace{\vec{u}_i + k\vec{Q}_i}_{\vec{b}}$$

Dobimo: $$B\vec{u}_{i+1} = \underbrace{\vec{u}_i + k\vec{Q}_i}_{\vec{b}}$$

Temperaturni profil ob naslednjem času dobimo tako, da rešimo linearni sistem enačb, npr z LU ali SVD razcepom.

Prednost metode je, da konvergira za vsak p.
To pomeni, da lahko delamo večje korake, a moramo v vsakem koraku rešiti sistem. Ker je matrika B tridiagonalna, je časovna zahtevnost reševanja $O(N)$.

Grafično shemo predstavimo kot:



Zaradi načina računanja metodo imenujemo: Backward-Time Centered-Space ali BTCS.

Crank-Nicolsonova shema:

Še boljše rezultate pa dobimo, če za oceno 2. odvoda po x vzamemo povprečje FTCS in BTCS shem:

$$u_{i+1,j} = u_{ij} + \frac{r}{2}\left[u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1} + u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}\right] + kQ_{ij} + O(k^2+h^2)$$

Tudi to shemo prepišemo v matrično obliko:

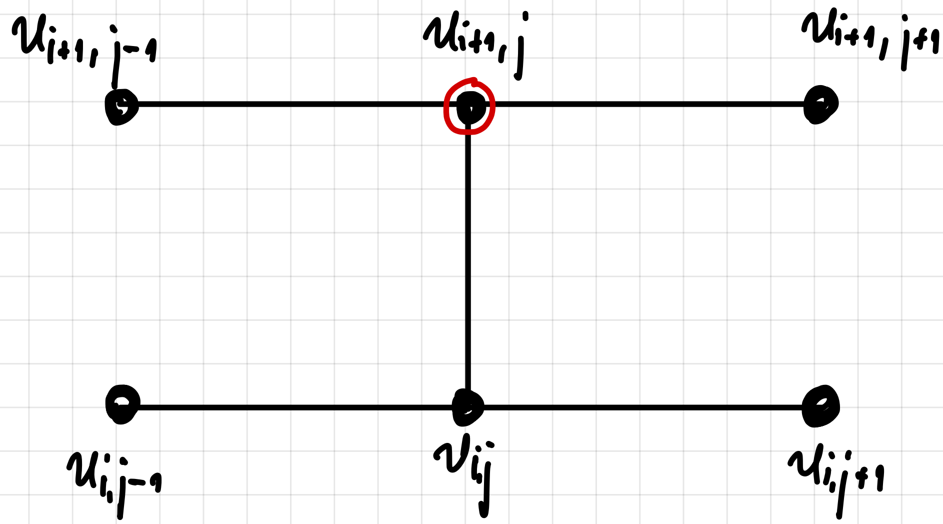
$$\underbrace{\left(\mathbb{1} - \frac{r}{2}A\right)}_{B}\vec{u}_{i+1} = \underbrace{\left(\mathbb{1} + \frac{r}{2}A\right)\vec{u}_i + k\vec{Q}}_{\vec{b}} + O(k^2+h^2)$$

Tudi ta metoda je implicitna in temperaturni profil ob naslednjem času dobimo tako, da rešimo linearni sistem:

$$B\vec{u}_{i+1} = \vec{b}$$

Tudi ta metoda konvergira za vsak r, dodatna prednost pa je ta, da je napaka $O(k^2+h^2)$, za red velikosti je boljša v času, zato lahko delamo še večje korake!

Shematski prikaz C.-N. sheme:

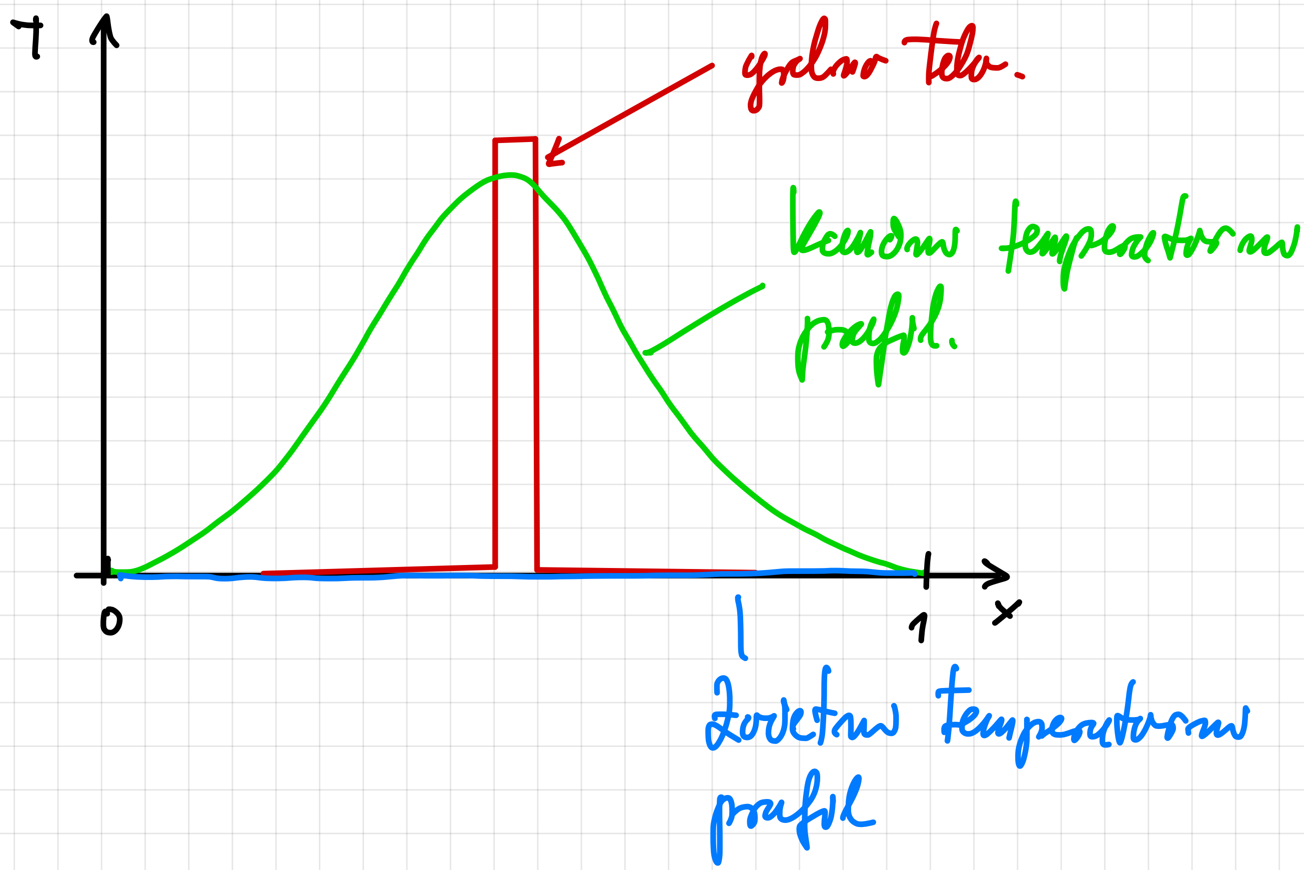


Zgled: Homogeno plast ohlajeno na temperaturo $T=0$ začnemo ob času $t=0$ greti z grelno napravo z gostoto:

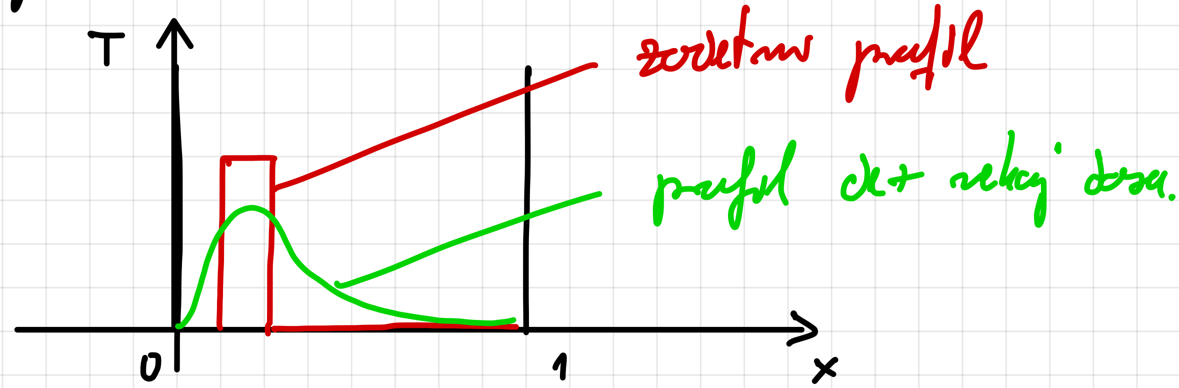
$$g(x) = \begin{cases} 1 & ; \; 0.45 \leq x \leq 0.55 \\ 0 & ; \; \text{sicer} \end{cases}$$

Začetni pogoj: $g(x) = 0$

Robni pogoj: $f_1(t) = f_2(t) = 0$



Naloga: Poišči temperaturni profil plasti, ki ima na začetku povsod temperaturo 0, le na intervalu $x \in [0.2, 0.4]$ ima temperaturo $T_0 = 1$.



Začetni pogoj:

$$T(x,0) = g(x) = \begin{cases} 1 & ; 0.2 \leq x \leq 0.4 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

Robna pogoja:

$$f_1(t) = f_2(t) = 0.$$

Valovna enačba:

Obravnavali bomo nihanje strune dolžine L, na katero ne delujejo nobene zunanje sile, npr. vpliv teže zanemarimo. Gibanje takšne strune določa homogena valovna enačba oblike:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \,; \quad 0 \leq x \leq L \,,$$

$u(x,t)$ je odmik strune na mestu x ob času t.

Hitrost potujočih valov na struni.

s predpisanimi začetnimi in robnimi pogoji. Ker v enačbi nastopa 2. odvod po času, moramo poleg začetnega odmika strune navesti tudi začetno hitrost v vseh točkah strune. Na robovih predpišemo Dirichletove robne pogoje:

$$\left.\begin{aligned} u(x, t=0) &= f_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t=0) &= f_1(x) \end{aligned}\right\} \text{ Začetna pogoja}$$

$$\left.\begin{aligned} u(x=0, t) &= g_0(t) \\ u(x=L, t) &= g_1(t) \end{aligned}\right\} \text{ Robna pogoja.}$$

Za lažje reševanje uvedemo nove spremenljivke:

$$x = \xi \cdot L \quad ; \quad \xi \in [0, 1]$$

$$t = \tau \cdot T_0 \quad ; \quad \tau \in [0, 1]$$, če T_0 čas integracije.

Nek izberemo čas. Lahko je to čas integracije.

Dobimo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \overbrace{\frac{T_0 \cdot c^2}{L^2}}^{= a} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \quad ; \quad 0 \le \xi \le 1$$

$$u(\xi, \tau = 0) = f_0(\xi \cdot L)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi, \tau = 0) = f_1(\xi \cdot L)$$

$$u(\xi = 0, \tau) = g_0(\tau \cdot T_0)$$

$$u(\xi = 1, \tau) = g_1(\tau \cdot T_0)$$

Opomba: Če bi izbrali $T_0 = \frac{L}{c}$, potem $a = 1$. Znebimo se tega parametra. Prav τ potem ne gre do 1.

Tudi za reševanje te PDE bomo uporabili metodo končnih diferenc. Tako kot pri difuziji ravnino (x,t) diskretiziramo z ekvidistantno mrežo točk. V x smeri izberemo N točk, v t smeri pa M točk. Velikosti korakov sta:

$$h = \frac{x_N - x_0}{N}, \quad k = \frac{t_M - t_0}{M}$$

Drugo odvodo po kraju in času aproksimiramo s simetričnimi diferencami:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{ij} = \frac{u_{i+1\,j} - 2u_{ij} + u_{i-1\,j}}{k^2} + O(k^2)$$

čas Lega

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{ij} = \frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{h^2} + O(h^2)$$

Diferencialno enačbo lahko potem prepišemo v sistem diferenčnih enačb.

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{k^2} = c^2 \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2+k^2)$$

$$u_{i+1,j} = 2u_{ij} - u_{i-1,j} + \left(\frac{ck}{h}\right)^2 \left[u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}\right]$$

" r^2 "

Zaradi tega člena te sheme ne moremo enostavno zapisati v matriko!

$$u_{i+1,j} = 2u_{ij} - u_{i-1,j} + r^2 \left[u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}\right]$$

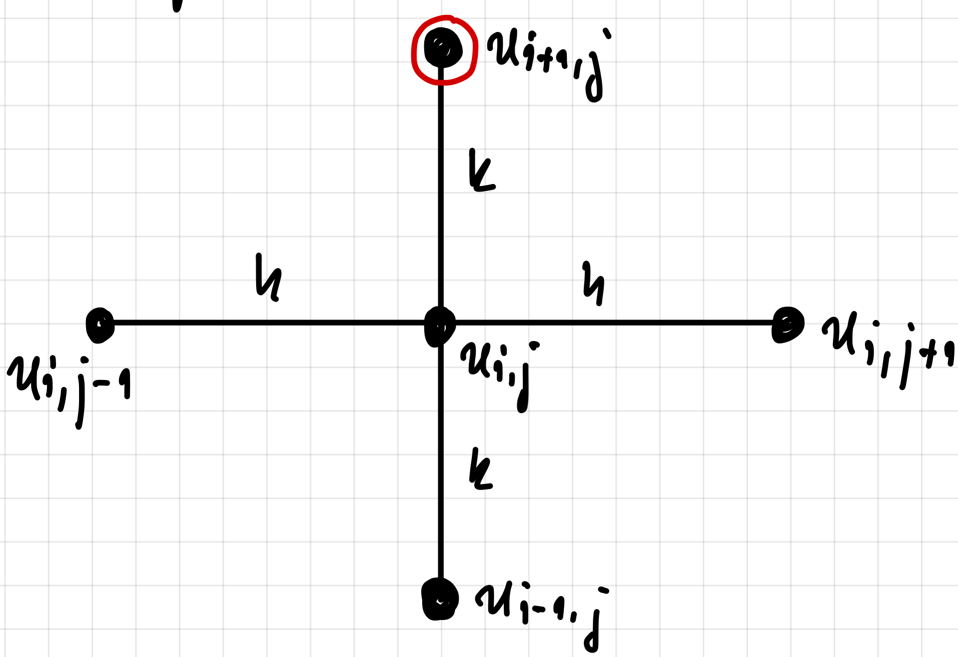
$$u_{i,0} = g_{i0} \; (= 0)$$

$$u_{i,M} = g_{iM} \; \underbrace{(= 0)}_{\text{V naši nalogi!}}$$

$i = 1, 2, 3, \ldots$

$j = 1, \ldots, M-1$

Shematski prikaz sheme:



Kaj pa začetni pogoj za odvod pri $t=0$?

$$u(0,x) \longrightarrow u_{0j} = f_0(x_j)\ ;\ j = 0,1,\dots,N$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) \xrightarrow{\text{ali}} \frac{u_{1j} - u_{0j}}{k} + O(k) = f_1(x_j)$$

$$\xrightarrow{\text{ali}} \frac{u_{1j} - u_{-1j}}{2k} + O(k^2) = f_1(x_j) = f_{1j}$$

?

Za aproksimacijo začetnega odvoda raje uporabimo simetrično diferenco, a na prvi pogled se zdi, da je ne moremo, saj rabimo $u_{-1,j}$. A to ni res. Začetni odvod uspešno skombiniramo z našo valovno enačbo v točki $t=0$:

$$u_{1,j} = 2u_{0,j} - u_{-1,j} + r^2\left[u_{0,j+1} - 2u_{0j} + u_{0,j+1}\right] \Big/ :2$$

Ta člen izrazimo z začetnim odvodom izraženim s simetrično diferenco:

$$u_{-1,j} = u_{1,j} - 2k \cdot f_{1j}$$

Dobimo:

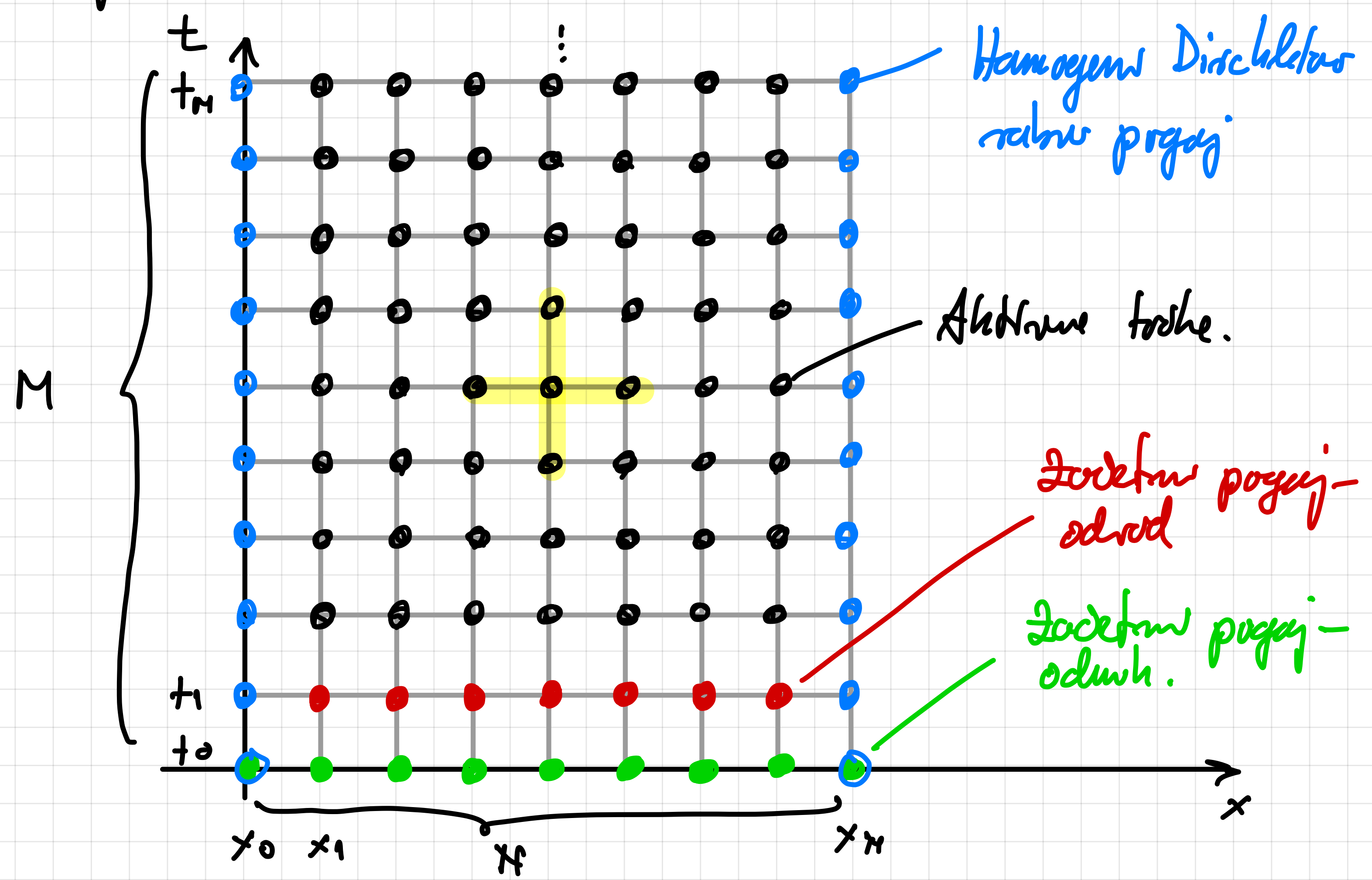
$$u_{1,j} = u_{0j} + \frac{r^2}{2}\left[u_{0,j+1} - 2u_{0j} + u_{0,j+1}\right] + k f_{1j}$$

$j = 1, 2, \ldots, N-1$

V primeru naše naloge velja: $f_1(x) = 0$ oziroma $f_{1j} = 0$. Potem:

$$u_{1,j} = u_{0j} + \frac{r^2}{2}\left[u_{0,j+1} - 2u_{0j} + u_{0,j+1}\right]$$

Sedaj znamo izvrednotiti vse točke v ovoju:

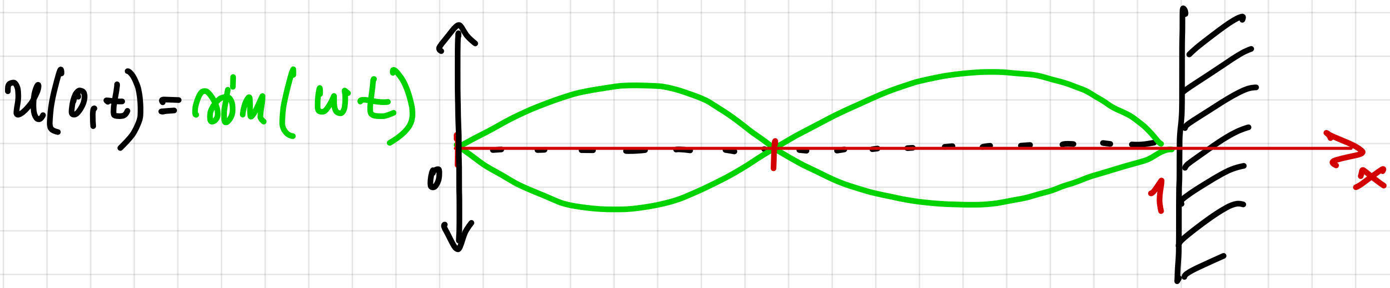


Komentar: Dobili smo eksplicitno shemo za reševanje valovne PDE. Izkaže se, da je metoda stabilna za

$$\boxed{r \leq 1}$$

Glej: Plestenjak, RUNM, str. 368.

Zgled: Opazuj stoječe valovanje, ko se vzpostavi v struni, ki je na eni strani togo vpeta, drugi konec pa harmonično niha s frekvenco ω.



Začetna pogoja:

$$f_0(x) = 0 \quad \text{(začetni odmik)}$$
$$f_1(x) = 0 \quad \text{(začetna hitrost)}$$

Robna pogoja:

$$g_0(t) = \sin(\omega t)$$
$$g_1(t) = 0$$

Stoječe valovanje pričakujemo tedaj, ko bo

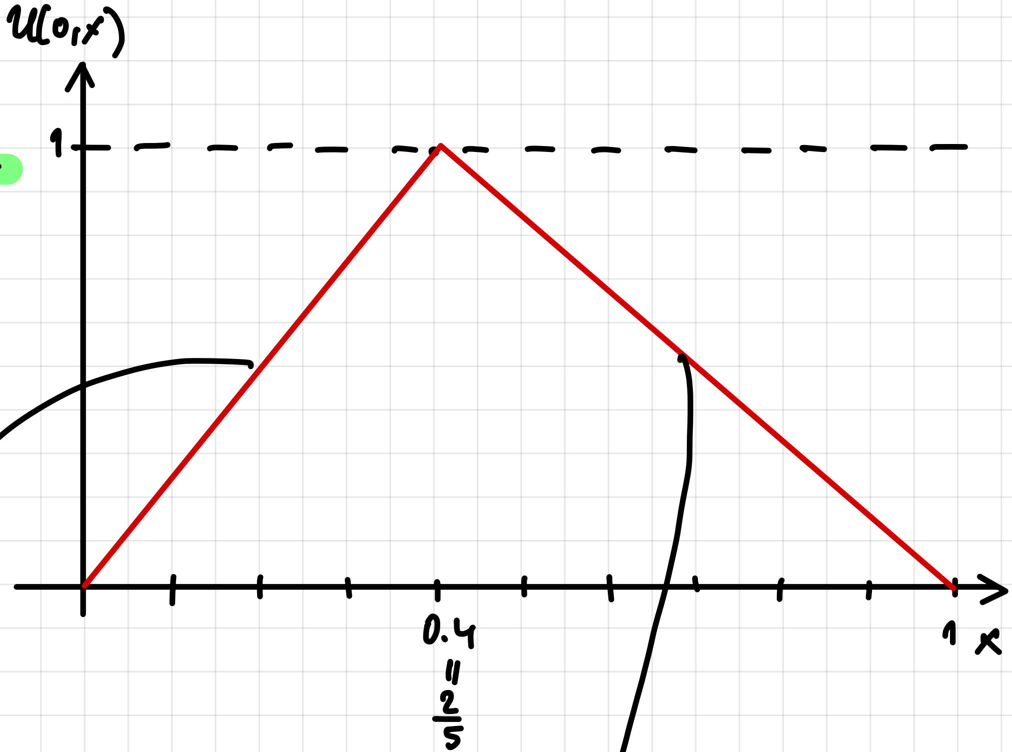
$$L = \frac{\lambda}{2} \cdot n \quad ; \quad n = 1, 2, 3, 4 \ldots$$

$$\lambda = \frac{2L}{n}$$

$$\omega = \frac{2\pi \overset{=1}{c}}{\lambda} = \frac{2\pi n}{2\underset{=1}{L}} = \underline{\underline{\pi n}}$$

Naloga: Opazuj nihanje strune, ko ima na začetku trikotno obliko z vrhom pri $x = 0.4a$. Začetna hitrost je povsod 0.

Začetni pogoji:



1. del:

$$f_0(x) = kx + 0 \; ;$$
$$1 = k \cdot \frac{2}{5}$$
$$k = \frac{5}{2}$$

$$f_0(x) = kx + n$$
$$0 = k + n$$
$$1 = k \cdot \frac{2}{5} - k = -\frac{3}{5}k$$
$$k = -\frac{5}{3} \;, \; n = \frac{5}{3}$$

Torej:

$$f_0(x) = \begin{cases} \frac{5}{2}x \; ; & 0 \le x \le \frac{2}{5} \\ \frac{5}{3}(1-x) \; ; & \frac{2}{5} \le x \le 1 \\ 0 \; ; & \text{sicer} \end{cases}$$

$f_1(x) = 0$ (začetna hitrost je 0)

Robni pogoji: Struna je simetrično vpeta. Na obeh straneh velja homogen Dirichletov robni pogoj:

$$g_0(t) = 0$$
$$g_1(t) = 0.$$

Sedaj imamo vse, da z eksplicitno diferenčno shemo rešimo našo diferencialno enačbo in raziščemo:

- kakšen je osnovni potek odmika strune.
- kako r vpliva na rešitev
- kako vpliva diskretizacija v prostoru in času.

⋮