Newtonov zakon

6. 4. 2022

7. naloga: Newtonov zakon

Gibanje masne točke v polju sil se opiše z diferencialno enačbo drugega reda

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F,$$

če se omejimo na gibanje vzdolž ene same koordinate x. Enačba je seveda enakovredna sistemu enačb prvega reda

$$m\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = p\;, \qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = F.$$

Seveda morajo biti na voljo tudi ustrezni začetni pogoji, tipično $x(t=0) = x_0$ in $dx/dt = v(t=0) = v_0$. Splošnejše gre tu za sistem diferencialnih enačb drugega reda:

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = f(x, y, y', y'', ...),$$

ki ga lahko prevedemo na sistem enačb prvega reda z uvedbo novih spremenljivk v slogu gibalne količine pri Netwonovi enačbi ($y' = v, y'' = z, ...$).

Z nekaj truda se da eksplicitno dokazati, mi pa lahko privzamemo, da so metode za reševanje enačb hoda (Runge-Kutta 4. reda, prediktor-korektor...) neposredno uporabne za reševanje takšnih sistemov enačb in torej aplikabilne v poljubno dimenzijah, kar naj bi v principu zadovoljilo večino naših zahtev.

Obstaja še posebna kategorija tako imenovanih *simplektičnih* metod, za enačbe, kjer je f le funkcija koordinat, $f(y)$, ki (približno) ohranjajo tudi Hamiltonian, torej energijo sistema. Najbolj znana metoda je Verlet/Störmer/Encke metoda, ki je globalno natančna do drugega reda in ki točno ohranja tudi vrtilno količino sistema (če je ta v danem problemu smiselna). Rešujemo torej za vsak diskretni korak n velikosti h, $x_n = x_0 + n \cdot h$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = f(y)$$

in pri diskretizaciji dobimo recept za korak y_n in $v_n = y'_n$:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \cdot v_n + \frac{h^2}{2} \cdot f(y_n) \\ v_{n+1} &= v_n + \frac{h}{2} \cdot \left[f(y_n) + f(y_{n+1}) \right]. \end{aligned}$$

V drugačnem zapisuje je metoda poznana tudi kot metoda “Središčne razlike” (Central Difference Method, CDM), če nas hitrost ne zanima:

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 \cdot f(y_n),$$

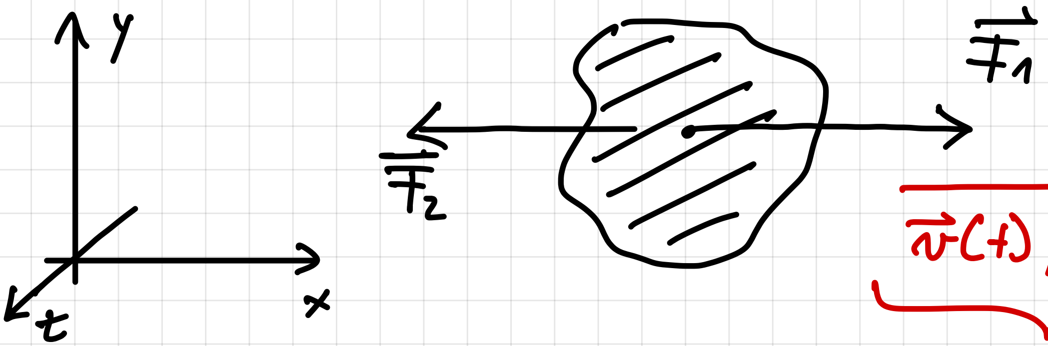
kjer prvo točko y_1 izračunamo po originalni shemi. Metodo CDM lahko uporabljamo tudi za primere, ko je f tudi funkcija ’časa’ x, f(x,y), le da tu simplektičnost ni zagotovljena (in tudi verjetno ne relevantna). Za simplektične metode višjih redov je na voljo na primer Forest-Ruth metoda ali Position Extended Forest-Ruth Like (PEFRL) metoda, ki sta obe globalno četrtega reda in enostavni za implementacijo.

Naloga:

- Čim več metod uporabi za izračun preprostega matematičnega nihala $d^2x/dt^2 = -\sin x$ z začetnim pogojem $x(0) = 1$, $v(0) = 0$. Poišči korak, ki zadošča za natančnost na 3 mesta. Primerjaj tudi periodično stabilnost shem: pusti, naj teče račun čez 10 ali 20 nihajev in ugotovi, koliko se amplitude nihajev sistematično kvarijo. Pomagaš si lahko tudi tako, da občasno izračunaš Hamiltonian, t.j. energijo $E = 1 - \cos x + \frac{1}{2}(dx/dt)^2$. Dodatno lahko tudi sprogramiraš eliptični integral, ki je analitična rešitev dane enačbe (seveda pa obstajajo v ustreznih programskih paketih).

- **Dodatno**: Uporabi numerične sheme za račun poševnega meta ob prisotnosti zračnega upora sorazmernega s kvadratom hitrosti. Poišči kot, pri katerem je domet maksimalen!

Tokratna naloga: Opis gibanja telesa, na katerega delujejo zunanje sile.



$$\underbrace{\vec{v}(t),\ \vec{r}(t)}_{\text{Gibanje telesa znamo opisati, če v vsakem trenutku poznamo } \vec{v}(t) \text{ in } \vec{r}(t)} = (x(t), y(t), z(t))$$

II. Newtonov zakon

Gibanja telesa z maso m določajo sile, ki nanj delujejo preko II. Newtonovega zakona:

$$\boxed{\underbrace{\sum_i \vec{F}_i}_{\vec{F}_R \text{ (Rezultanta sil)}} = m\cdot\vec{a}}$$

$$m\cdot\vec{a} = m\cdot\underset{\frac{d\vec{v}}{dt}}{\underset{\parallel}{\dot{\vec{v}}}} = m\cdot\underset{\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}{\underset{\parallel}{\ddot{\vec{r}}}} = \vec{F}_R(\underbrace{\vec{r}, \vec{v}, t})$$

V splošnem je lahko funkcija vsega tega!

Sistem diferencialnih enačb II. reda:

$$\ddot{\vec{q}} = \frac{1}{m}\vec{F}(\vec{q},\vec{v},t) = \tilde{\vec{F}}(\vec{q},\vec{v},t)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_x \\ \ddot{q}_y \\ \ddot{q}_z \end{bmatrix} = \tilde{\vec{F}}\left((q_x,q_y,q_z)^T,(v_x,v_y,v_z)^T,t\right)$$

Začetni pogoji: Newtonov zakon določa družino za tisto določitev posamezne rešitve, pa moramo poznati še dva začetna pogoja:

$$\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 = \begin{bmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \\ v_{0z} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{q}(t=0) = \vec{q}_0 = \begin{bmatrix} q_{0x} \\ q_{0y} \\ q_{0z} \end{bmatrix}$$

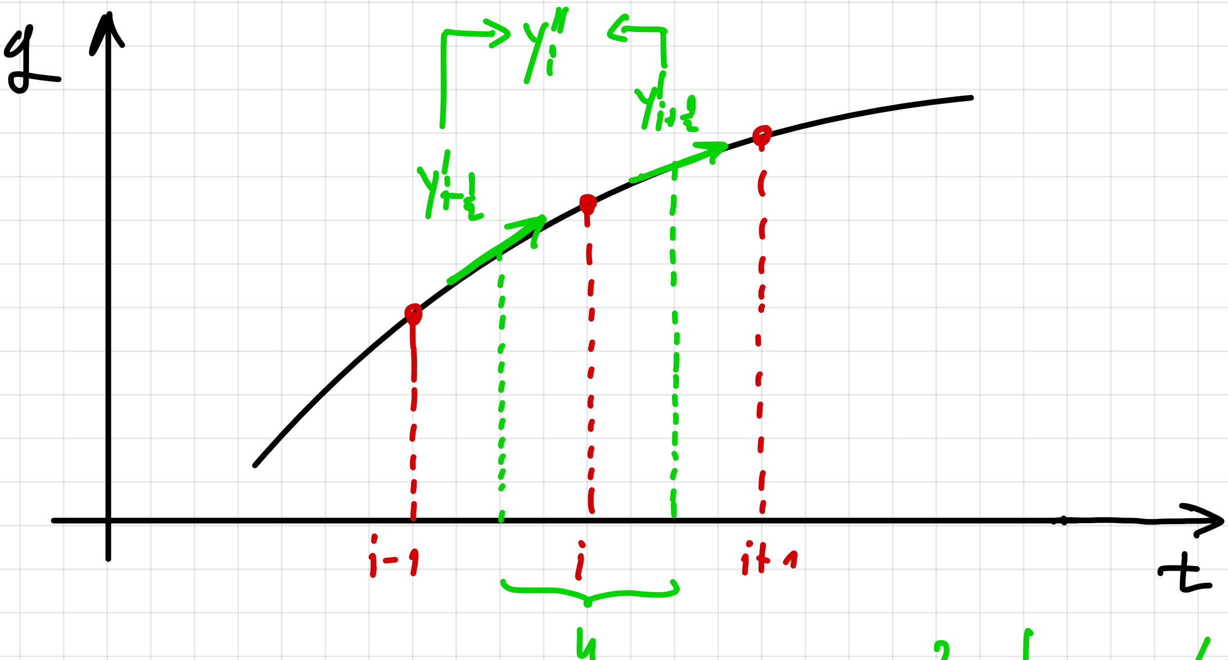
Tak sistem diferencialnih enačb želimo sedaj numerično rešiti.

V 1D:

V primeru gibanja v 1D, dobimo poenostavljeno obliko:

$$\ddot{y} = \frac{1}{m} F(y,v,t) = \tilde{F}(y,v,t)$$

Numerično rešitev poiščemo (kot pri problemu I. reda) tako, da 2. odvod približamo s končno diferenco. Uporabimo centralno diferenco:



Zopet uporabimo simetrično diferenco

$$y''(t) = \lim_{h \to 0} \frac{y'(t+\frac{h}{2}) - y'(t-\frac{h}{2})}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{y(t+h)-y(t)}{h} - \frac{y(t)-y(t-h)}{h}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{y(t+h) - 2y(t) + y(t-h)}{h^2}$$

Od tod vidimo, da lahko 2. odvod aproksimiramo kot:

$$y''(t_i) \simeq \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = \tilde{F}(t_i, y_i, v_i)$$

Od tod potem dobimo:

$$y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + h^2 \tilde{F}(t_i, y_i, v_i) + \underbrace{\mathcal{O}(h^2)}$$

$y_2, y_3, y_4, \ldots$

Algoritem dela za $i = 1, 2, \ldots$

Glej Plestenjak RUNM, str. 283.

Manjkajočo točko dobimo iz začetnega odvoda:

$$y_1 = y_0 + h \cdot v_0$$

Ali pa še bolje, pomagamo si z razvojem v Taylorjevo vrsto in točko y_1 še bolj natančno ocenimo:

$$y_1 = y_0 + h y' + \frac{h^2}{2} y'' + \mathcal{O}(h^3)$$

$$= y_0 + h v_0 + \frac{h^2}{2} \cdot \tilde{F}(t_0, y_0, v_0)$$

Če je $\tilde{F}$ odvisna od v, potem si pomagamo s končnimi diferencami za izračun v_i, npr.

$$v_{i+1} = v_i + h \tilde{F}(t_i, y_i, v_i)$$

Če obravnavamo gibanje v 3D:

$$\vec{g}_0, \vec{v}_0 = \text{začetna pogoja}$$

$$\vec{g}_1 = \vec{g}_0 + h\vec{v}_0 + \frac{h^2}{2}\vec{F}(\vec{g}_0, \vec{v}_0, t_0)$$

$$\vec{g}_{i+1} = 2\vec{g}_i - \vec{g}_{i-1} + h^2 \vec{F}(\vec{g}_i, \vec{v}_i, t_i)$$

To imenujemo Metoda Sredinske Razlike (CDM = Central difference method). Prav nam pride, kadar nas zanima le $\vec{g}(t)$, ne pa tudi $\vec{v}(t)$. Metoda je simplektična!

V splošnem za reševanje diferencialnih enačb II. reda uporabljamo drugačne pristope.

Modus operandi: Problem prevedemo na probleme, ki smo se jih naučili rešiti zadnjič, tj. na enačbe I. reda.

Vmesna spremenljivka!

Pomagamo si z vpeljavo vmesne spremenljivke. Najbolj naravna izbira je $\vec{v} = \dot{\vec{q}}$. Pogosto izberemo tudi gibalno količino $\vec{p} = m\vec{v} = m\dot{\vec{q}}$

Dobimo:

$$\dot{\vec{q}} = \vec{v}$$

$$\dot{\vec{v}} = \tilde{\vec{F}}(\vec{q}, \vec{v}, t)$$

Z začetnimi pogoji: $\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0$

$$\vec{q}(t=0) = \vec{q}_0$$

Razpišemo:

$$\dot{q}_x = v_x$$

$$\dot{q}_y = v_y$$

$$\dot{q}_z = v_z$$

$$\dot{v}_x = \tilde{F}_x(\vec{q}, \vec{v}, t) \equiv x\text{-komponenta } \vec{F}$$

$$\dot{v}_y = \tilde{F}_y(\vec{q}, \vec{v}, t)$$

$$\dot{v}_z = \tilde{F}_z(\vec{q}, \vec{v}, t)$$

Dobili smo sistem 6ih diferencialnih enačb 1. reda.

Vpeljemo:

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} \vec{q} \\ \vec{v} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{f} = \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \tilde{\vec{F}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \frac{1}{m}\vec{F} \end{bmatrix}$$

Dobimo:

$$\dot{\vec{y}} = \vec{f}(\vec{y}, \overset{t}{x})$$

Takšne enačbe brez vektorskega znaka že znamo reševati z enako kodo. Vektorski znak pomeni, da moramo reševati 6 takšnih enačb skupaj.

Npr.: Eulerjeva metoda:

$$\left.\begin{aligned} \vec{y}_0 &= (\vec{q}_0, \vec{v}_0)^T \\ x_i &= h \cdot i \\ \vec{y}_{i+1} &= \vec{y}_i + h \cdot \vec{f}(\vec{y}_i, x_i) \; ; \end{aligned}\right\} \; i = 0, 1, 2, \dots$$

Npr: Modificirana Eulerjeva metoda:

$$\vec{y}_0 = (\vec{q}_0, \vec{v}_0)^T$$

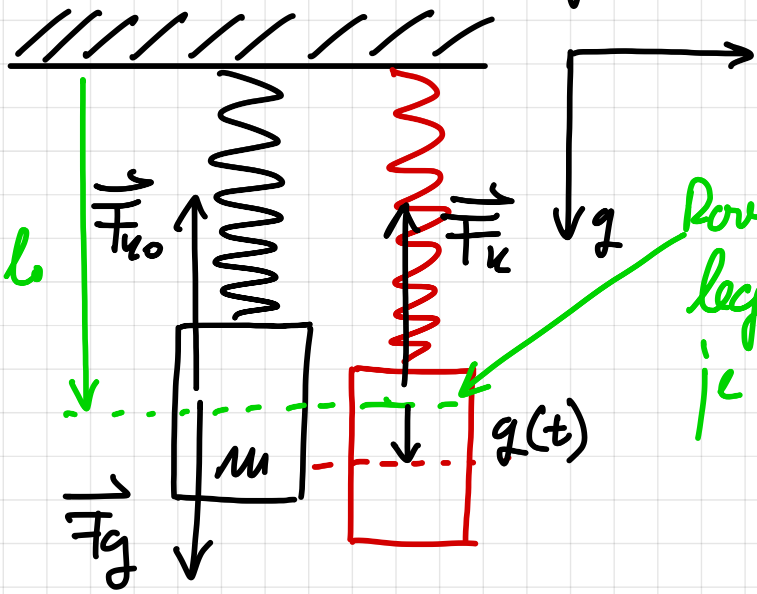
$$\vec{y}_{i+\frac{1}{2}} = \vec{y}_i + \frac{h}{2} \vec{f}(\vec{y}_i, x_i)$$

$$\vec{y}_{i+1} = \vec{y}_i + \vec{f}\left(\vec{y}_{i+\frac{1}{2}}, x_i + \frac{h}{2}\right)$$

Opomba: Vse metode za reševanje diferencialnih enačb 1. reda so že prilagojene tako, da znajo obravnavati sistem enačb!

Lahko se že lotimo dela!

Zgled: Opiši gibanje nedušenega vzmetnega nihala z maso m in koeficientom vzmeti k. Začetna hitrost je nič. Začetni odmik pa y_0.



Ravnovesna lega nihala. Okrog te lege bo nihalo nihalo. V ravnovesju je sila teže enaka sili vzmeti

$$F_g = mg = k l_0$$

Newtonov zakon:

Vrača k ravnovesju.

$$y: \quad m a(t) = m\ddot{y} = -k y \quad / :m$$

$$\ddot{y} = -\frac{k}{m} y = \tilde{F}(y)$$

Analitična rešitev:

$$\ddot{y} + \frac{k}{m} y = 0$$

Enačbo rešimo z nastavkom:

$$y(t) = A\cos\omega t + \underbrace{B\sin\omega t}_{\text{Ta odpade, ker } \dot{y}(0)=0}$$

$$-\omega^2 A\cos\omega t + \frac{k}{m} A\cos\omega t = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$g(0) = A = g_0$$

Rešitev: $g(t) = g_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$

Numerična rešitev: Rešujemo z uvedbo spremenljivke $v = \dot{g}$. Dobimo sistem:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{g} &= v \\ \dot{v} &= -\frac{k}{m} g \end{aligned}}$$

Zapišemo: $\vec{y} = \begin{bmatrix} g \\ v \end{bmatrix}$, $\vec{f}(\vec{y}) = \begin{bmatrix} v \\ -\frac{k}{m} g \end{bmatrix}$, $\vec{y}_0 = \begin{bmatrix} g_0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Eulerjeva metoda:

$$\vec{y}_{i+1} = \vec{y}_i + h \cdot \vec{f}(\vec{y}_i)$$

$$\begin{bmatrix} g_{i+1} \\ v_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_i \\ v_i \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} v_i \\ \underbrace{-\frac{k}{m} g_i}_{\tilde{f}(g_i)} \end{bmatrix} + O(h^2)$$

$i = 0, 1, 2, \ldots$

Modificirana Eulerjeva metoda:

$$\vec{y}_{i+\frac{1}{2}} = \vec{y}_i + \frac{h}{2}\vec{f}(\vec{y}_i)$$

$$\vec{y}_{i+1} = \vec{y}_i + \frac{h}{2}\vec{f}\left(\vec{y}_{i+\frac{1}{2}}\right) \qquad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{bmatrix} q_{i+\frac{1}{2}} \\ v_{i+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_i \\ v_i \end{bmatrix} + \frac{h}{2}\begin{bmatrix} v_i \\ \tilde{F}(q_i) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q_{i+1} \\ v_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_i \\ v_i \end{bmatrix} + h\begin{bmatrix} v_{i+\frac{1}{2}} \\ \tilde{F}\left(q_{i+\frac{1}{2}}\right) \end{bmatrix} \qquad i = 0, 1, 2, \dots$$

Prepišimo sistem v takšno obliko, da nastopajo le vrednosti na mreži:

$$q_{i+1} = q_i + h v_{i+\frac{1}{2}} = \underbrace{q_i + h \cdot v_i + \frac{h^2}{2}\tilde{F}(q_i)}_{\text{Enakomerno pospešeno gibanje}}$$

$$v_{i+1} = v_i + h\,\underbrace{\tilde{F}\left(q_i + \frac{h}{2}v_i\right)}_{\text{Pospešek v vmesni točki.}}$$

Ohranitev energije:

$$m\vec{a} = m\dot{\vec{v}} = \vec{F}_R$$

Naše nihalo se giblje v 1D: Premaknemo se iz y_1 v y_2

$$m\dot{v} = F_R \quad \Big/ \int_{y_1}^{y_2} dy$$

$$m\int_{y_1}^{y_2} \dot{v}\, dy = \underbrace{\int_{y_1}^{y_2} F_R\, dy}_{\text{Delo, ki ga opravi sistem}}$$

$dy = v\,dt$

V našem primeru je to delo sile vzmeti.

$$m\int_{t_1}^{t_2} \dot{v}\, v\, dt = m\int_{t_1}^{t_2} (\dot{v^2})\, dt = -\int_{y_1}^{y_2} k y\, dy$$

$$\frac{m v(t_2)^2}{2} - \frac{m v(t_1)^2}{2} = \underbrace{\frac{m v_2^2}{2}}_{T_2} - \underbrace{\frac{m v_1^2}{2}}_{T_1} = \underbrace{\frac{k y_1^2}{2}}_{V_1} - \underbrace{\frac{k y_2^2}{2}}_{V_2}$$

Vpeljemo energijo sistema $E = T + V$.

$$E_1 = T_1 + V_1 = T_2 + V_2 = E_2$$

Celotna energija sistema se ohranja.

V splošnem zapišemo Hamiltonovo funkcijo:

$$H(\vec{p},\vec{q}) = \underbrace{\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}}_{T(\vec{p})} + V(\vec{q}) = \frac{m\vec{v}^{\,2}}{2} + V(\vec{q})$$

Vektorja lege $\vec{q}$ in gibalne količine zadoščata Hamiltonovim enačbam:

$$\dot{\vec{q}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{m} \quad , \quad \dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}} = -\nabla V$$

V našem primeru:

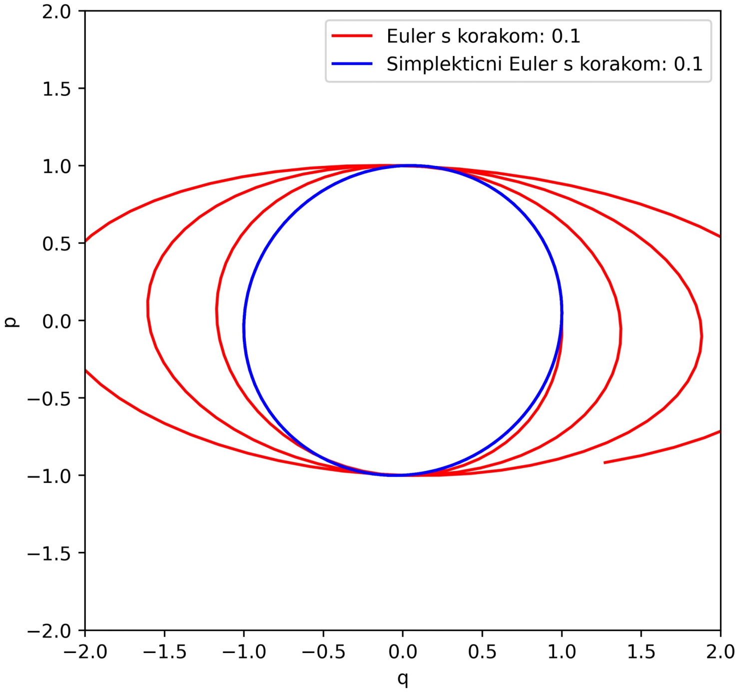
$$\dot{q} = p = v \quad , \quad \dot{p} = m\dot{v} = -\frac{1}{2}2kx = -kx$$

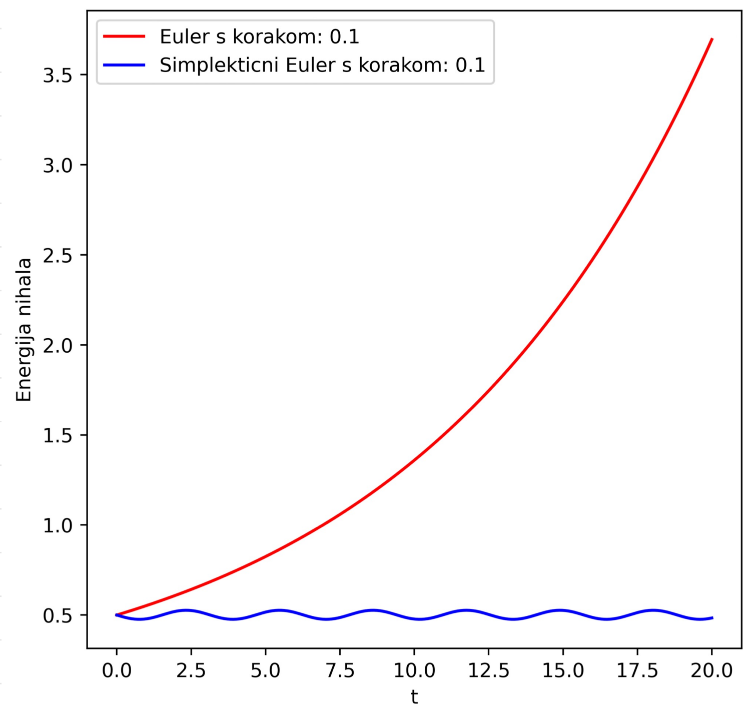
Ker Hamiltonova funkcija ni eksplicitno odvisna od časa, je H konstanta gibanja in je enaka energiji sistema E.

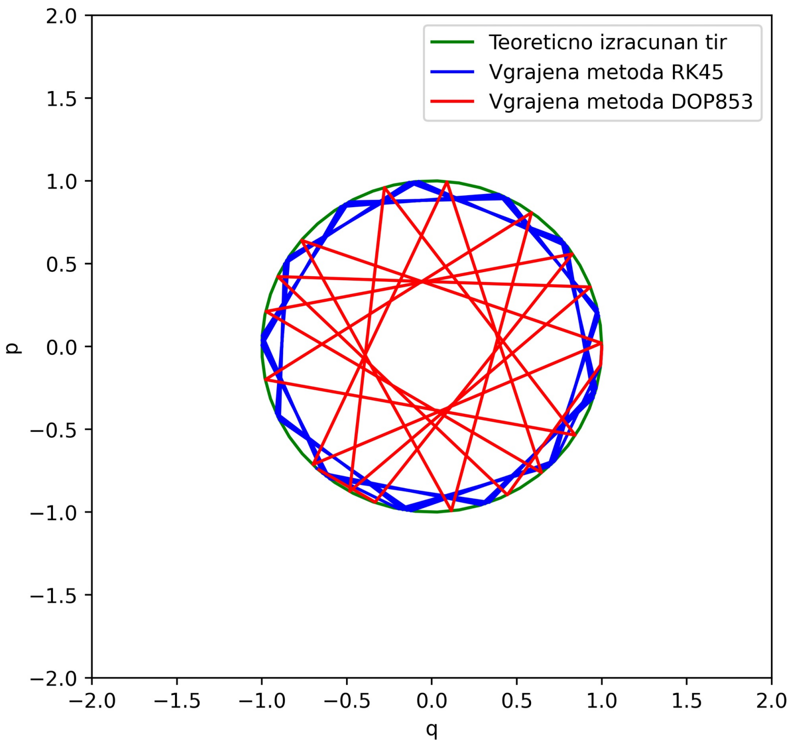
Komentar: Pri numerični obravnavi takšnih sistemov se splača spremljati konstante gibanja, kot je energija, če relevantno pa tudi vrtilna količina, Runge-Lenzov vektor.

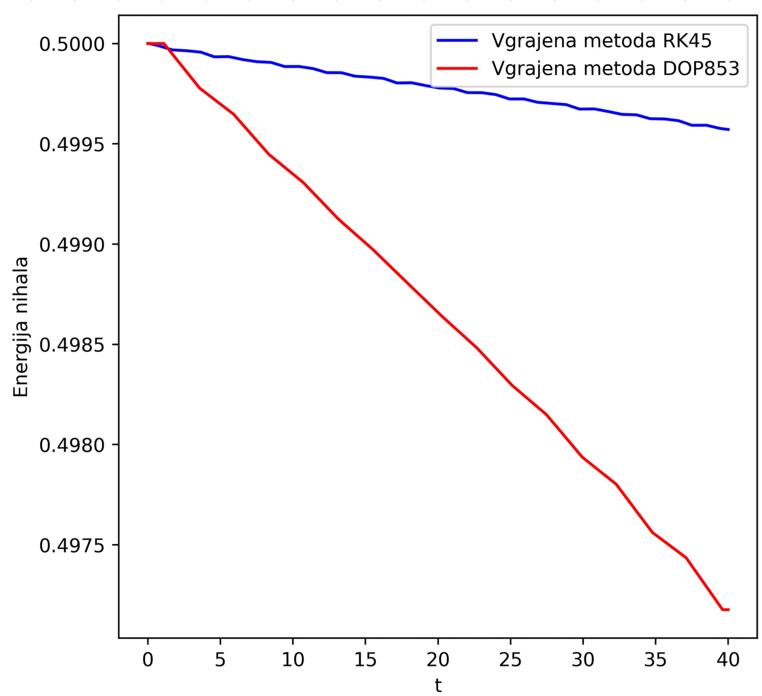
Npr: Pri obravnavi gibanja planeta okoli zvezde.

Ugotovitev: Numerični algoritmi, ki jih navadno uporabljamo za numerično reševanje diferencialnih enačb (Eksplicitna Eulerjeva metoda, Modificirana Eulerjeva metoda, RK4, RK45) ne ohranjajo energije!



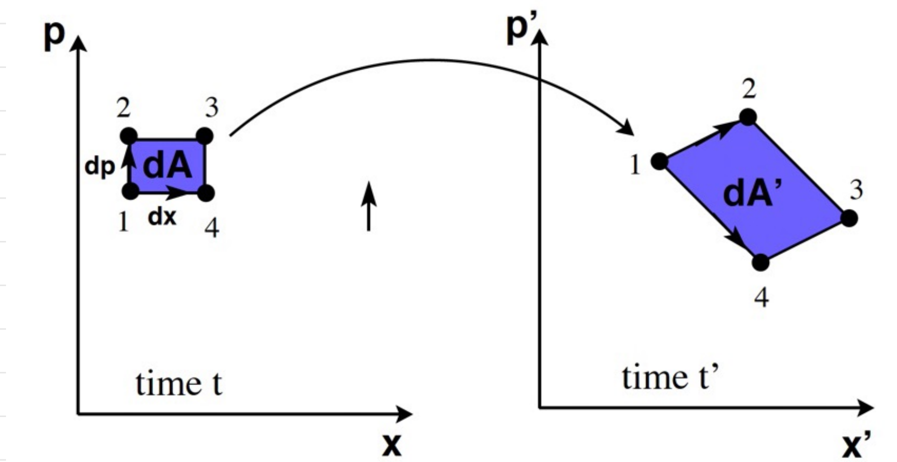






Simplektične metode:

- Integracijske sheme za obravnavo Hamiltonskih sistemov in slonijo na lastnostih, ki veljajo za časovni razvoj takih sistemov.



- Časovni razvoj Hamiltonskega sistema (integracija Newtonovih enačb v času) lahko interpretiramo kot preslikavo v faznem prostoru (prostor q-p), ki ohranjajo ploščino $dA = dA'$. Takšne preslikave imenujemo simplektične! ("Liouvillov teorem")

- Simplektične metode so konstruirane tako, da ohranjajo ploščino v faznem prostoru.

- Posledica: Simplektične metode ohranjajo energijo!

Velja: Simplektične metode so v splošnem implicitne. Metode postanejo eksplicitne za separabilne primere, kjer velja $H(\vec{q},\vec{p}) = T(\vec{p}) + V(\vec{q})$.

Osredotočimo se sedaj na takšne primere, saj mnogo spada v to kategorijo!

Simplektični Euler:

$$\vec{p}_{i+1} = \vec{p}_i + h \cdot \vec{F}(\vec{q},\vec{p})$$

$$\vec{q}_{i+1} = \vec{q}_i + h \cdot \frac{1}{m} \cdot \vec{p}_{i+1} + O(h^2)$$

Temu koraku rečemo "kick", ker spremeni $\vec{p}$

Temu koraku pa rečemo "drift", ker se z novo hitrostjo premaknemo za $\Delta t = h$.

Razlika med osnovnim Eulerjem in SE je v tem členu. Tu je $\vec{p}_{i+1}$, tam pa $\vec{p}_i$.

Za primer vzmetnega nihala: $(p = mv)$

$$v_{i+1} = v_i + h\frac{1}{m}(-kq_i) = v_i - h\frac{k}{m}q_i$$

$$q_{i+1} = q_i + hv_{i+1} = q_i\left(1 - \frac{h^2 k}{m}\right) + hv_i$$

Metoda Strömer-Verlet (Leapfrog)

- Vsesplošno uporabna simplektična metoda
- Ima lokalno natančnost $O(h^3)$, $O_g(h^2)$.
- Ohranja energijo in vrtilno količino sistema.
- Enostavna
- Ekonomična – le en izračun funkcije na iteracijo.

Metoda ima dva koraka:

1.) $i \longrightarrow i+\frac{1}{2}$: $\left(\begin{matrix} t_i \longrightarrow t_{i+\frac{1}{2}} \\ x_i \longrightarrow x_{i+\frac{1}{2}} \end{matrix}\right)$

$$v_{i+\frac{1}{2}} = v_i + \frac{h}{2}\tilde{F}(q_i)$$ a.

$$q_{i+\frac{1}{2}} = q_i + \frac{h}{2} v_{i+\frac{1}{2}}$$

2.) $i+\frac{1}{2} \longrightarrow i+1$:

$$q_{i+1} = q_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} v_{i+\frac{1}{2}}$$

Tadva koraka lahko združimo b.

$$v_{i+1} = v_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}\tilde{F}(q_{i+1})$$ c.

Če združimo vmesna koraka:

$$v_{i+\frac{1}{2}} = v_i + \frac{h}{2}\tilde{F}(y_i) \longleftarrow \text{"kick" za } \frac{h}{2}$$

$$y_{i+1} = y_i + h\, v_{i+\frac{1}{2}} \longleftarrow \text{"drift" za } h$$

$$v_{i+1} = v_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}\tilde{F}(y_{i+1}) \longleftarrow \text{"kick" za } \frac{h}{2}$$

Prepišimo metodo v obliko brez vmesnih korakov, samo za vrednosti na mrežnih točkah i: Prvo enačbo upoštevamo v preostalih dveh:

$$(*) \quad y_{i+1} = \underbrace{y_i + h v_i + \frac{h^2}{2}\tilde{F}(y_i)}_{\text{Prepoznamo enačbo za enakomerno pospešeno gibanje!}} + O(h^3)$$

$$v_{i+1} = \underbrace{v_i + h\underbrace{\left(\frac{\tilde{F}(y_i) + \tilde{F}(y_{i+1})}{2}\right)}_{\text{Povprečen pospešek.}}}_{\text{Približek enakomerno pospešenega gibanja.}}$$

V enačbi (*) se znebimo hitrosti. Primerjajmo enačbi za $(i+1)$ in $(i-1)$:

$$
\left.\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + h v_i + \frac{h^2}{2}\tilde{F}(y_i) \\
y_{i-1} &= y_i - h v_i + \frac{h^2}{2}\tilde{F}(y_i)
\end{aligned}\right] +
$$

$$
y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + h^2 \tilde{F}(y_i)
$$

Ugotovitev: Dobili smo metodo CDM. Metoda je simplektična! Uporabimo, ko nas zanima le y_i.

Zakaj leap frog?

Če pogledamo enačbe ⊠ vidimo, da za napredovanje algoritma potrebujemo lego v celih točkah in hitrost v vmesnih točkah!

(1) $$y_{i+1} = y_i + h \cdot v_{i+\frac{1}{2}}$$

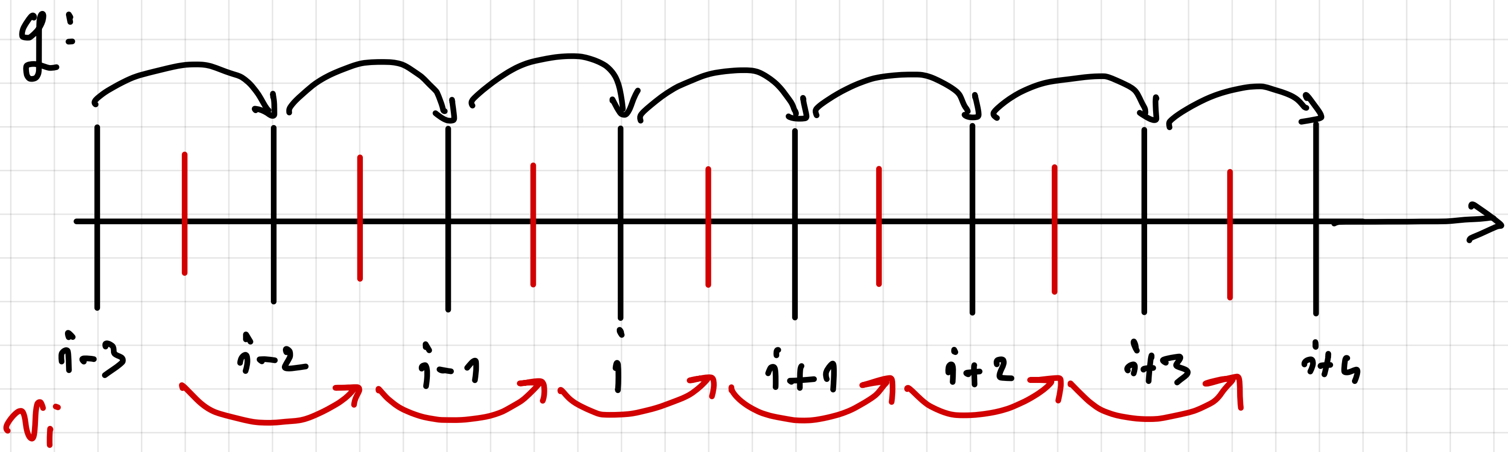
(2.)

$$v_{i+\frac{1}{2}} = v_i + \frac{h}{2}\tilde{F}(y_i)$$

$$v_{i+\frac{3}{2}} = v_{i+1} + \frac{h}{2}\tilde{F}(y_{i+1})$$

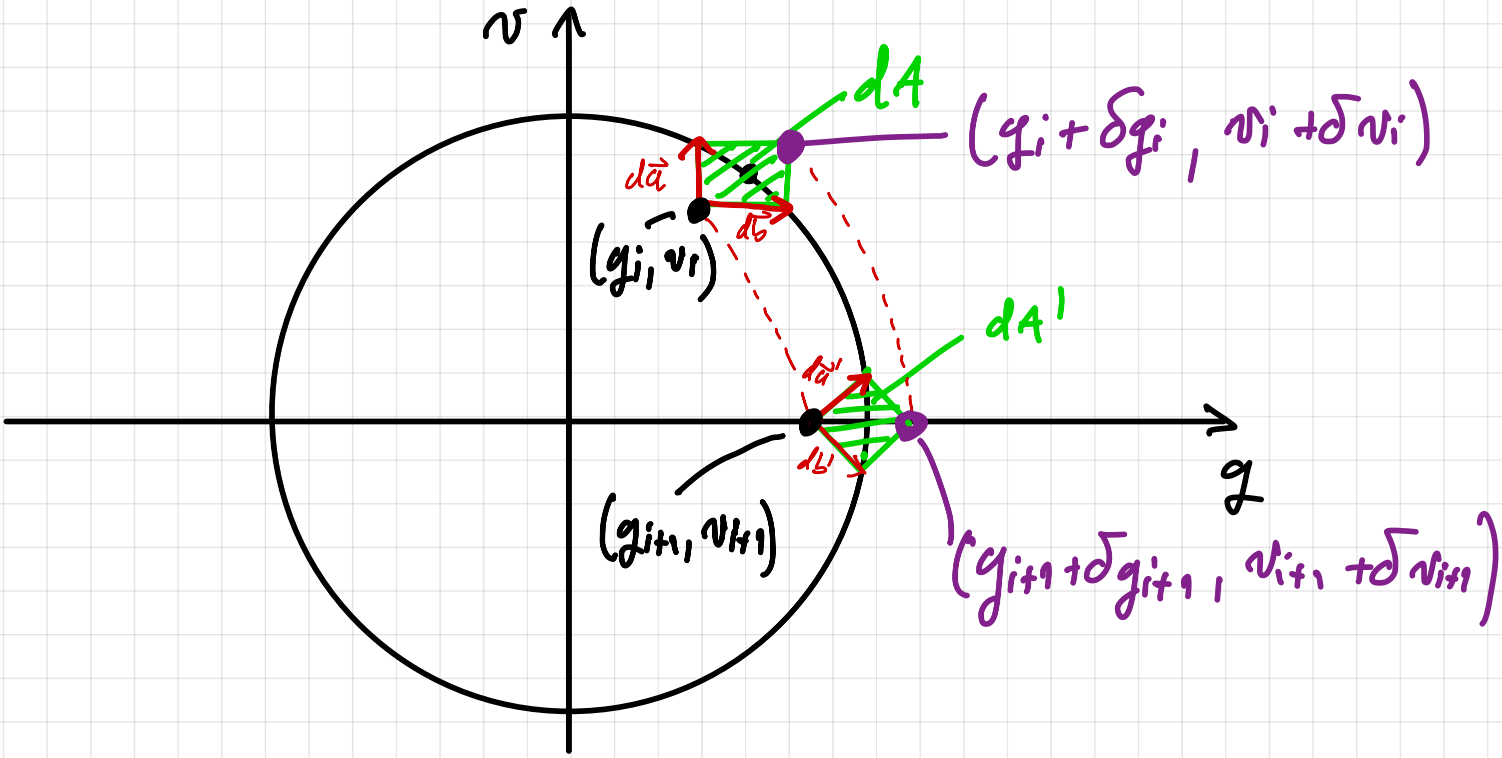
$$v_{i+1} = v_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}\tilde{F}(y_{i+1})$$

$$v_{i+\frac{3}{2}} = v_{i+\frac{1}{2}} + h\tilde{F}(y_{i+1})$$



Napredovanje algoritma je zdaj kot skakanje žabe.

Ali je metoda Leapfrog res simplektična:



Korak Leapfrog metode:

$$q_i \longrightarrow q_{i+1} = Q(q_i, v_i)$$

$$v_i \longrightarrow v_{i+1} = V(q_i, v_i)$$

Ploščini štirikotnikov sta:

$$dA = |d\vec{a} \times d\vec{b}| = da \cdot db$$

$$dA' = |d\vec{a}' \times d\vec{b}'| = \det J \cdot dA$$

kjer je $\det J$ Jakobijeva determinanta.

Ker poznamo transformacijo: $(g_i, v_i) \to (g_{i+1}, v_{i+1})$ znamo Jacobijevo determinanto izračunati:

$$\det J = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_{i+1}}{\partial g_i} & \frac{\partial g_{i+1}}{\partial v_i} \\ \frac{\partial v_{i+1}}{\partial g_i} & \frac{\partial v_{i+1}}{\partial v_i} \end{vmatrix}$$

Ploščina $dA' = \det J \, dA$ se bo ohranjala, ko bo $\det J = 1$. Če to pokažemo, potem bomo pokazali, da je Leapfrog metoda simplektična.

Poglejmo si najprej prvo polovično korak:

$$v_{i+\frac{1}{2}} = v_i + \frac{h}{2} \tilde{F}(g_i)$$

$$g_{i+\frac{1}{2}} = g_i + \frac{h}{2} v_{i+\frac{1}{2}}$$

$$v_{i+\frac{1}{2}} + \delta v_{i+\frac{1}{2}} = v_i + \delta v_i + \frac{h}{2} \overbrace{\tilde{F}(g_i + \delta g_i)}^{\sim \tilde{F}(g_i) + \delta g_i \cdot \tilde{F}'(g_i)}$$

$$= \underbrace{v_i + \frac{h}{2} \tilde{F}(g_i)}_{v_{i+\frac{1}{2}}} + \delta v_i + \frac{h}{2} \delta g_i \tilde{F}'(g_i)$$

$$g_{i+\frac{1}{2}} + \delta g_{i+\frac{1}{2}} = g_i + \delta g_i + \frac{h}{2} \left(v_{i+\frac{1}{2}} + \delta v_i + \frac{h}{2} \delta g_i \tilde{F}'(g_i) \right)$$

$$= \underbrace{g_i + \frac{h}{2} v_{i+\frac{1}{2}}}_{g_{i+\frac{1}{2}}} + \delta g_i + \frac{h}{2} \delta v_i + \frac{h^2}{4} \delta g_i \tilde{F}'(g_i)$$

Dobimo:

$$\begin{bmatrix} \delta q_{i+\frac{1}{2}} \\ \delta v_{i+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1+\frac{h^2}{4}\tilde{F}'(q_i) & \frac{h}{2} \\ \frac{h}{2}\tilde{F}'(q_i) & 1 \end{bmatrix}}_{J_1} \begin{bmatrix} \delta q_i \\ \delta v_i \end{bmatrix}$$

$$\det J = 1 + \frac{h^2}{4}\tilde{F}'(q_i) - \frac{h^2}{4}\tilde{F}'(q_i) = \underline{\underline{1}}$$

Sedaj uvedemo še drugi korak:

$$q_{i+1} = q_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} v_{i+\frac{1}{2}}$$

$$v_{i+1} = v_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}\tilde{F}(q_{i+1})$$

$$q_{i+1} + \delta q_{i+1} = q_{i+\frac{1}{2}} + \delta q_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}\left(v_{i+\frac{1}{2}} + \delta v_{i+\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \underbrace{q_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} v_{i+\frac{1}{2}}}_{q_{i+1}} + \underbrace{\delta q_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}\delta v_{i+\frac{1}{2}}}$$

$$v_{i+1} + \delta v_{i+1} = v_{i+\frac{1}{2}} + \delta v_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}\tilde{F}\left(q_{i+1} + \delta q_{i+1}\right)$$

$$= v_{i+\frac{1}{2}} + \delta v_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}\tilde{F}\left(q_{i+1} + \delta q_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}\delta v_{i+\frac{1}{2}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
v_{i+1} + \delta v_{i+1} &= v_{i+\frac{1}{2}} + \delta v_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}\tilde{F}(q_{i+1}) + \\
&\quad + \frac{h}{2}\tilde{F}'(q_{i+1})\left(\delta q_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}\delta v_{i+\frac{1}{2}}\right) \\
&= v_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}\tilde{F}(q_{i+1}) + \\
&\quad + \delta v_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}\tilde{F}'(q_{i+1})\left(\delta q_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}\delta v_{i+\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} q_{i+1} \\ v_{i+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{h}{2} \\ \frac{h}{2}\tilde{F}'(q_{i+1}) & 1 + \frac{h^2}{4}\tilde{F}'(q_{i+1}) \end{bmatrix}}_{J_2} \begin{bmatrix} q_i \\ v_i' \end{bmatrix}
$$

$$
\det J_2 = 1 + \frac{h^2}{4}\tilde{F}'(q_{i+1}) - \frac{h^2}{4}\tilde{F}'(q_{i+1}) = \underline{\underline{1}}
$$

Celotna transformacija je: $J = J_2 J_1$, ker je $\det J = \det J_2 \cdot \det J_1 = 1$. Pokazali smo, da je metoda simplektična.

Opomba: Metoda "leapfrog" deluje le z fiksnimi koraki. Spremenljiv korak pokvari simplektičnost!

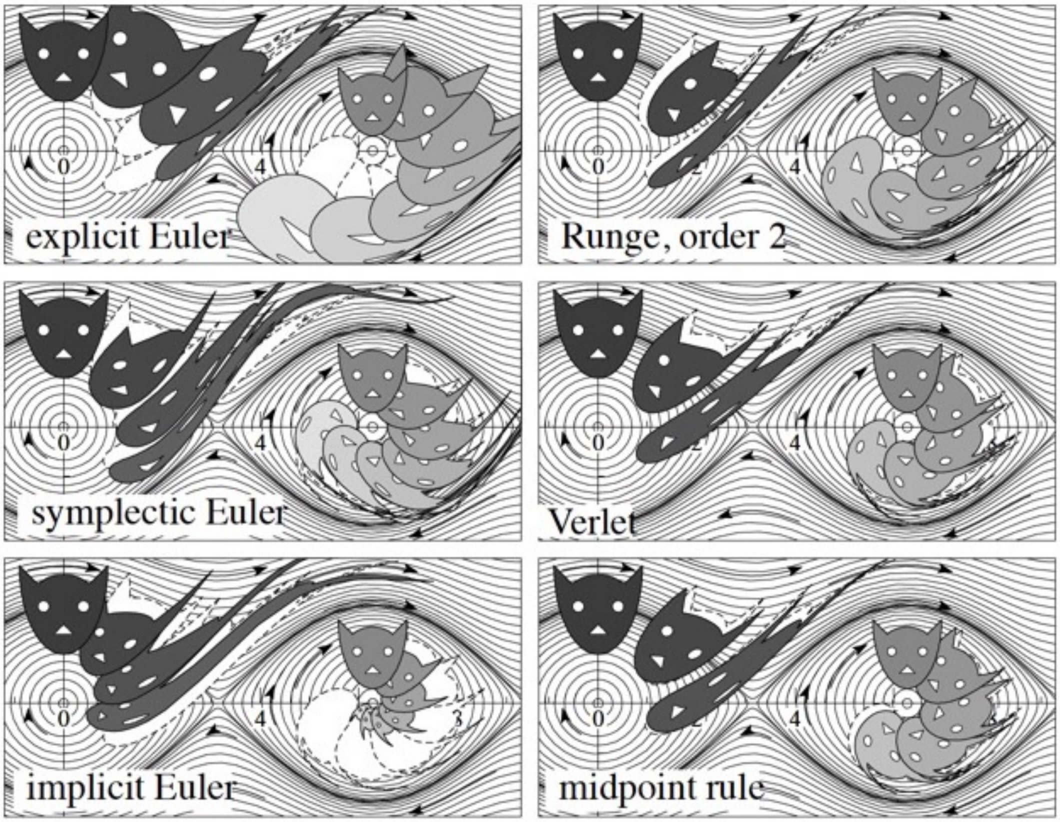
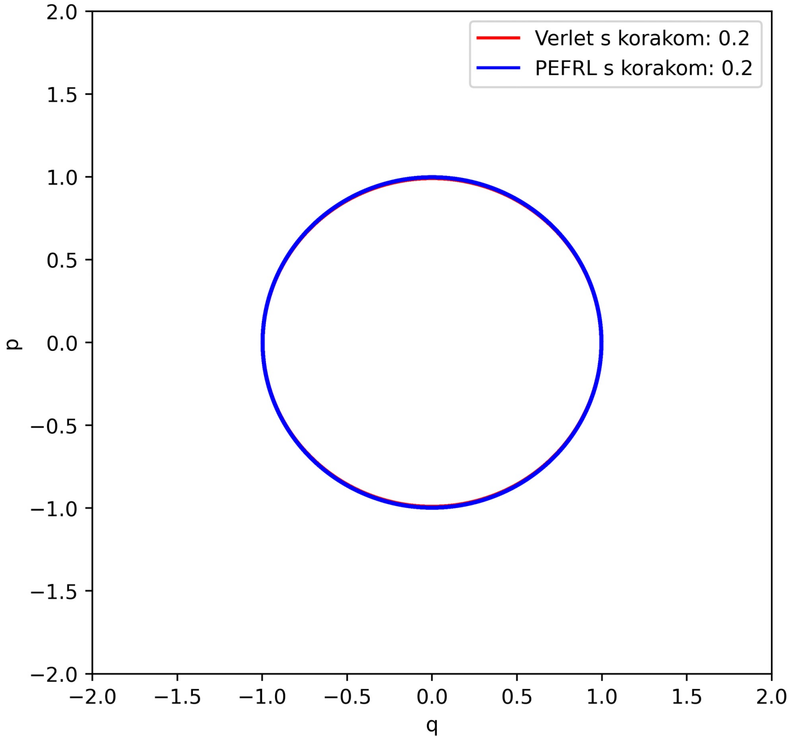


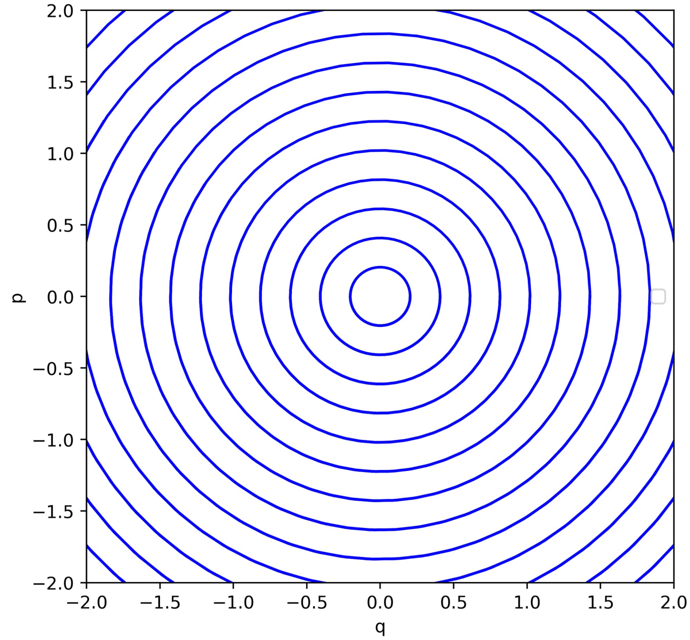
Figure 1: Area preservation of numerical methods for the pendulum; same initial sets as in Figure 3 of Lecture 1; first order methods (left column): $h = \pi/4$; second order methods (right column): $h = \pi/3$; dashed: exact flow.

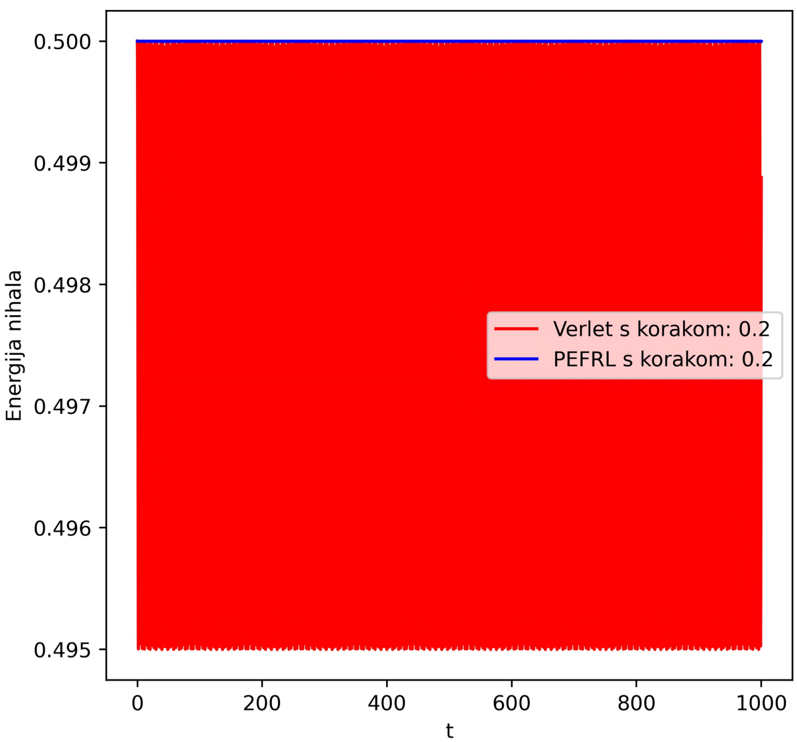
Komentar:

- Obstajajo tudi simplektične metode višjih redov
- Ena najboljših je PEFRL (Position Extended Forest-Ruth-Like method)
- Metoda je $\mathcal{O}(h^5)$ oziroma $\mathcal{O}_g(h^4)$
- Pri računanju moramo izvesti štiri vrednotenja funkcije na korak.

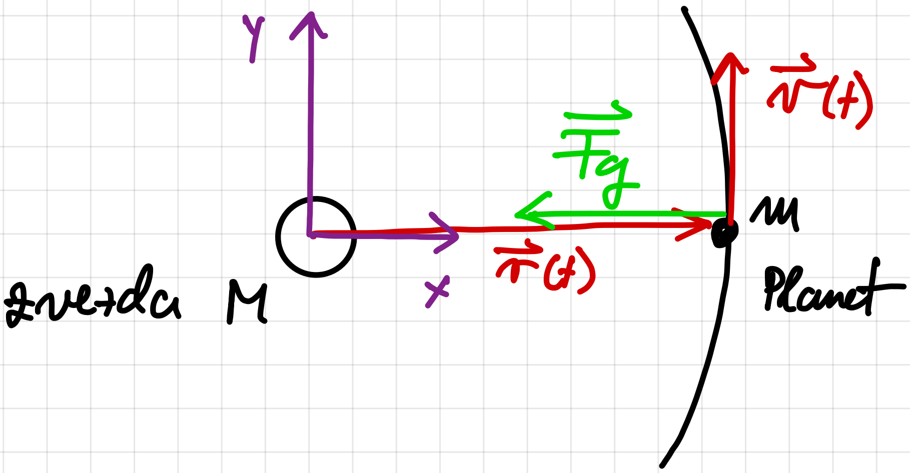


Fazni portret:





Gibanje planeta okrog zvezde (Keplerjev problem)



$$m \cdot \vec{a} = \sum_i \vec{F}_i \quad \leftarrow \text{Deluje le gravitacijska sila!}$$

$$\cancel{m}\,\ddot{\vec{r}} = -G \frac{\cancel{m} M}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Dobimo sistem diferencialnih enačb II. reda:

$$\ddot{\vec{r}} = -G \frac{M}{r^3} \vec{r} = \tilde{\vec{F}}(\vec{r})$$

$\downarrow$ Razpišemo po komponentah.

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = -\frac{GM}{(x^2+y^2)^{3/2}} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

Uvedemo brezdimenzijske enačbe gibanja $(GM = 1)$:

$$\ddot{x} = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\ddot{y} = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Uvedemo še hitrosti kot vmesne spremenljivke in prevedemo sistem na sistem enačb I. reda:

$$\dot{\vec{r}} = (u, v)^T$$

Dobimo:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= u \\
\dot{y} &= v \\
\dot{u} &= -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\
\dot{v} &= -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Navesti moramo še začetne pogoje, npr.:

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad u(0) = 0, \quad v(0) = v_0$$

Tak sistem sedaj numerično rešimo!

Tipi gibanja:

- $|v_0| = 1$ — kroženje
- $|v_0| < 1$ } Eliptični tir
- $1 < |v_0| < \sqrt{2}$ }
- $|v_0| = \sqrt{2}$ — Parabola
- $|v_0| > \sqrt{2}$ — Hiperbola.

Obhodni čas:

Iz III. Keplerjevega zakona sledi:

$$T = 2\pi \underbrace{a^{3/2}}_{\text{Polovica večje od osi elipse.}}$$

Energija sistema:

$$E = H = T + V = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - G\frac{mM}{r}$$

$$\frac{dH}{dt} = \cancel{\frac{1}{2}} m \cancel{2} \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} - G\frac{mM}{r^2}\dot{r} = \frac{GMm}{r^3}\vec{r}\dot{\vec{r}} - \frac{GMm}{r^3}\vec{r}\dot{\vec{r}}$$

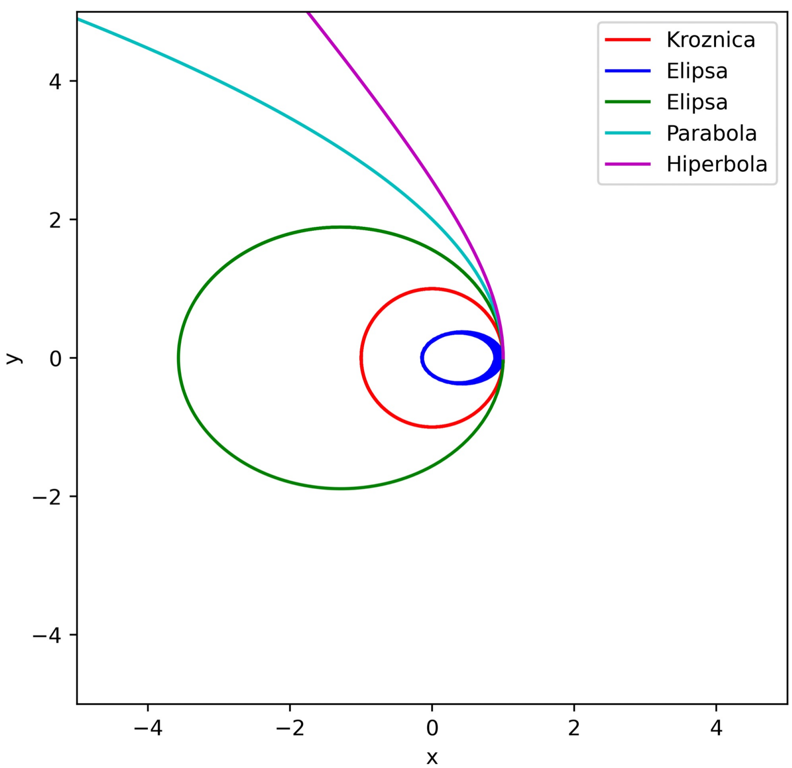
$$\ddot{\vec{r}}: \frac{GM\vec{r}}{r^3} \qquad \dot{r}: \frac{\vec{r}\dot{\vec{r}}}{r}$$

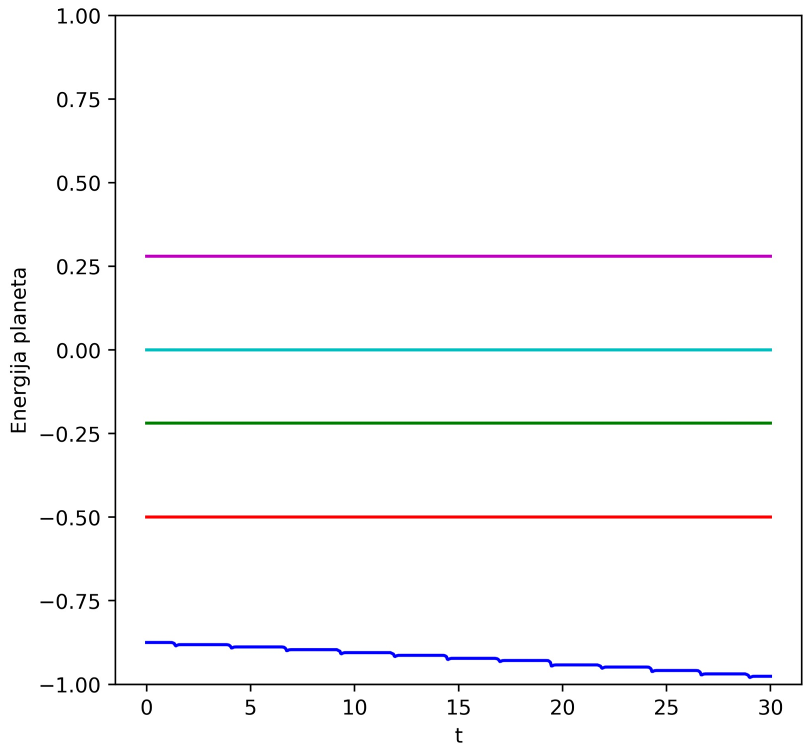
$$= \underline{\underline{0}}$$

Energija se ohranja — je konstanta gibanja!

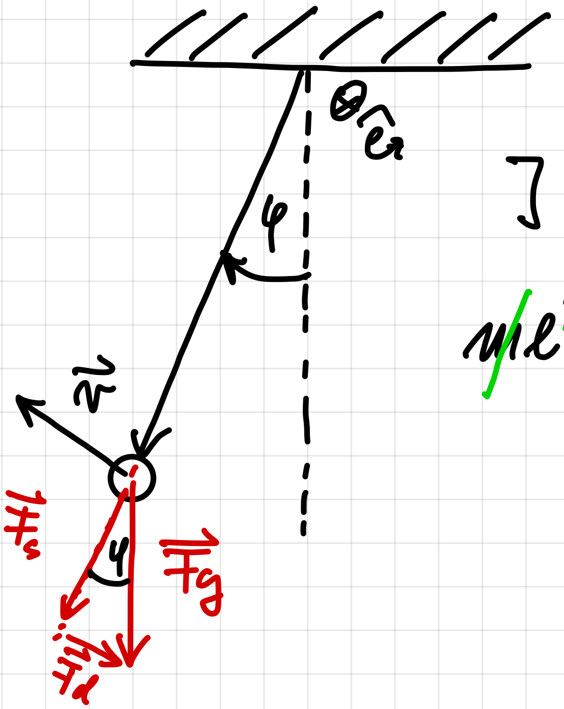
Konstanti gibanja sta tudi:

- Vrtilna količina : $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}}$
- Runge-Lenzov vektor: $\vec{A} = \dot{\vec{r}} \times \vec{l} - GMm\dfrac{\vec{r}}{r}$





Naloga: Matematično nihalo



$$J \cdot \vec{\alpha} = \sum_i \vec{M}_i$$

$$\cancel{m} l^{\cancel{2}} \cdot \ddot{\varphi} \cdot \cancel{\hat{e}_z} = \vec{l} \times \vec{F}_g = -\cancel{l}\,\cancel{m}\, g \sin\varphi \,\cancel{\hat{e}_z}$$

$$\ddot{\varphi} = -\underbrace{\frac{g}{l}}_{=\omega^2} \sin\varphi$$

Potrebujemo še začetni pogoj:

$$\dot{\varphi}(0) = 0, \quad \varphi(0) = 1$$

To sedaj rešimo numerično!

Spomnimo se:

Vzamemo: $\omega^2 = \frac{g}{l} = 1$:

$$\ddot{\varphi} = -\sin\varphi$$

To moramo rešiti!

V približku majhnih kotov ($\varphi \ll 1$): $\varphi_0 \ll 1$.

$$\ddot{\varphi} \doteq -\varphi$$

Rešitev vemo da je: $\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \cos(t)$

Kako dobro se numerična rešitev ujema z analitično v približku $\varphi_0 << 1$?

Energija:

$$H = T + V = \underbrace{\frac{1}{2}\overset{\omega^2}{\overset{\|}{\dot{\varphi}^2}}}_{T(\omega)} + \underbrace{1 - \cos\varphi}_{V(\varphi)}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial \omega} = \omega \quad ; \quad \dot{\omega} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\sin\varphi$$