

Formule za Runge-Kutta-Fehlbergovo metodo

Miha Mihovilovič

March 2022

Runge-Kutta-Fehlbergova metoda sloni na eksplicitni 6-stopenjski metodi Runge-Kutta za numerično reševanje diferencialne enačbe $y' = f(x, y)$ s korakom h :

$$k_i = hf \left(x_n + \alpha_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j \right), \quad i = 1, \dots, 6.$$

Iz koeficientov k_1, \dots, k_6 sestavimo metodo reda 4 za izračun vrednosti $y(x)$ v naslednjem koraku $n + 1$:

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^6 \gamma_i k_i + \mathcal{O}(h^5).$$

Iz istih koeficientov sestavimo tudi kontrolno metodo reda 5 za oceno napake metode reda 4:

$$y_{n+1}^* = y_n + \sum_{i=1}^6 \gamma_i^* k_i + \mathcal{O}(h^6).$$

Lokalno napako metode ocenimo iz razlike $|y_{n+1} - y_{n+1}^*|$. Metodo je mogoče implementirati z različnimi koeficienti α_i , β_{ij} , γ_i in γ_i^* . Originalni parametri Fehlberga so navedeni v Tabeli 1. Parametri metode Cash-Karp pa so prikazani v Tabeli 2.

Fehlberg									
i	α_i	β_{ij}					γ_i	γ_i^*	
1	0						$\frac{25}{216}$	$\frac{16}{135}$	
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$					0	0	
3	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{32}$				$\frac{1408}{2565}$	$\frac{6656}{12825}$	
4	$\frac{12}{13}$	$\frac{1932}{2197}$	$-\frac{7200}{2197}$	$\frac{7296}{2197}$			$\frac{2197}{4104}$	$\frac{28561}{56430}$	
5	1	$\frac{439}{216}$	-8	$\frac{3680}{513}$	$-\frac{845}{4104}$		$-\frac{1}{5}$	$-\frac{9}{50}$	
6	$\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{27}$	2	$-\frac{3544}{2565}$	$\frac{1859}{4104}$	$-\frac{11}{40}$	0	$\frac{2}{55}$	
	j	1	2	3	4	5			

Table 1: Parametri Fehlberga za vloženo metodo Runge-Kutta 4(5).

Cash-Karp								
i	a_i	b_{ij}					γ_i	γ_i^*
1	0						$\frac{2825}{27648}$	$\frac{37}{378}$
2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$					0	0
3	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$				$\frac{18575}{48384}$	$\frac{250}{621}$
4	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{6}{5}$			$\frac{13525}{55296}$	$\frac{125}{594}$
5	1	$-\frac{11}{54}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{70}{27}$	$\frac{35}{27}$		$\frac{277}{14336}$	0
6	$\frac{7}{8}$	$\frac{1631}{55296}$	$\frac{175}{512}$	$-\frac{575}{13824}$	$\frac{44275}{110592}$	$\frac{253}{4096}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{512}{1771}$
	j	1	2	3	4	5		

Table 2: Parametri Cash-Karp za vloženo metodo Runge-Kutta 4(5).