

Integracija z metodo Monte Carlo

2. 3. 2022



Opamniki iz verjetnosti in statistike:

Imejmo naključno spremenljivko X , ki je v n -
množnem prostoru (definicijona območje) $D_X = [a, b]$
porazdeljena po zvezi verjetnostni porazdelitvi
 $p(x)$.

Velja:
$$\int_{D_X = [a, b]} p(x) dx = \int_a^b p(x) dx = 1$$

(Porazdelitev je normalizirana)

Verjetnost, da je $c < X < d$ kjer $a < c < d < b$:

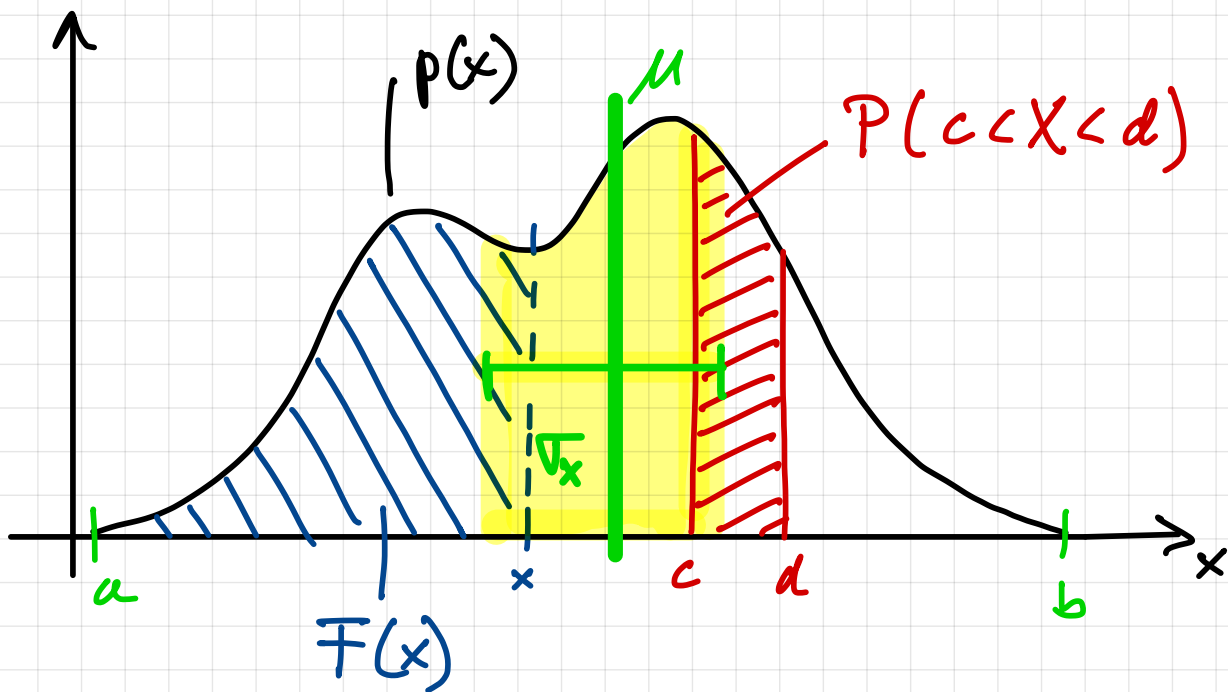
$$P(c < X < d) = \int_c^d p(x) dx$$

Kumulativna porazdelitvena funkcija:

Velikostni spremenljivka \rightarrow Velika vrednost x

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx = \int_a^x p(x) dx$$

$\underbrace{\int_{-\infty}^x}_{\text{V splošnem}}$



Vpeljemo momente posredstvene - to so prave
 vrednosti naključne spremenljivke X , ki so znane
 za posredstven $p(x)$.

1. moment (povprečje)

$$\mu = E[X] = \int_a^b x \cdot p(x) dx$$

↑
 Priložena vrednost (arg. expected value)

2. moment (varianca)

$$\begin{aligned} \sigma^2 = \text{Var}[X] &= E[X^2] - E[X]^2 = \\ &= \int_a^b (x - \bar{x})^2 p(x) dx \end{aligned}$$

Standard odviklan (karakteristika i odnosi parametara)

$$\sigma_x = \sqrt{\text{Var}[X]}$$

Primeri parametara i njihovih momenta (Derry, str. 7.)

Some univariate densities.				
$f(x)$	$E(X)$	$\text{Var}(X)$	Mode(X)	$F(x)$
Normal(μ, σ^2) $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2	μ	$\int_{-\infty}^x f(y) dy$
Gamma(a, b) $\frac{1}{\Gamma(a)b^a} x^{a-1} e^{-\frac{x}{b}}$ ($x > 0$)	ab	ab^2	$(a-1)b$	$\int_{-\infty}^x f(y) dy$
Exponential(λ) $\lambda e^{-\lambda x}$ ($x > 0$)	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	0	$1 - e^{-\lambda x}$
Cauchy(σ) $\frac{\sigma}{\pi(x^2 + \sigma^2)}$	does not exist	does not exist	0	$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{\sigma}\right)$
Pareto(a, b) $\frac{ab^a}{x^{a+1}}$ ($x > b$)	$\frac{ab}{a-1}$ ($a > 1$)	$\frac{ab^2}{(a-2)(a-1)^2}$ ($a > 2$)	b	$1 - \frac{b^a}{x^a}$
Beta(a, b) $\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ ($x \in [0,1]$)	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	$\frac{a-1}{a+b-2}$ ($a, b > 1$)	$\int_{-\infty}^x f(y) dy$

Statistika: Empirično določanje nezatastnih parametrov in njihovi značilni parametri.

Iz vzorčnega prostora naberemo vzorec vrednosti naključnih spremenljivih $X_i = x_i$

$\{X_i; i = 1, \dots, n\}$ Vzorec velikosti n

Povprečje in varianca parametrov bi sicer
možna oceniti iz vzorca, kar je iluzorno.

Vpeljimo vzorec povprečje in vzorec varianca.

! Tem kalibracijo vedemo statistika

Vzorec povprečje:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Vzorec varianca:

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

To lahko izračunamo
za vsak vzorec, ki
je iluzorno in velja.

Je vrednost vzorca druga

vrednost \Rightarrow

VZORČNE PORAZDELITVE

Za uzorkovne statističke veličine izračunamo procenjene vrednosti:

$$E[\bar{X}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X_i] = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \underline{\underline{\mu}}$$

$$E[S_x^2] = \dots \dots \dots = \underline{\underline{\sigma^2}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Glej Širca,} \\ \text{VF, str 157} \end{array} \right)$$

Na svakoj vrednosti

Proverimo, da li su \bar{X} i S_x^2 nepovratno povezane:
Če bi imalo "∞" stepena slobode (de bi prošle ponašanje), mi bi izračunali prosečnu vrednost \bar{X} i S_x^2 bi dobili prave momente para slučajne.

Velja tako:

$$\text{Var}[\bar{X}] = \text{Var} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i] =$$
$$= \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \underline{\underline{\frac{\sigma^2}{n}}}$$

↓ Za uzorke po putem uzorka: ($\sigma^2 \rightarrow s^2$)

$$S_{\bar{X}}^2 = \frac{S_x^2}{n} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

odnosno: $S_{\bar{X}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}}$

Mi znamo srednjo in skupno varočo zeta le na podlagi tega varoča sklepamo na povprečje in varianco:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

(med x)

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$S_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{S_x^2}{n}$$

To so sedaj naše cenilke.

Prava povprečje potem ocenimo kot:

$$\mu = \bar{x} \pm \frac{S_x}{\sqrt{n}}$$

Generiranje naključnih števil:

Literatura: Širca, RMF, NRC,

Motivacija:

Derouge, Non-Uniform Random Variate Generation.

Za integracijo po metodi Monte Carlo, za simuliranje statističnih procesov, ..., potrebujemo (dolge) vrste naključnih števil. Takšne vrste ustvarjamo z generatorji naključnih števil.

Težava:

Rodninski je determinističen stroj - izreka vrste, ki mu jih damo - ni me more generirati pravih naključnih števil.

kar zna, je rodninski "posebni" zaporedij, ki so nerandorno naključna

Takšne vrste imenujemo PSEVDONAKLJUČNA ŠTEVILA.

Stopnje naključnosti ugotavljamo s posebnimi statističnimi testi: Prizkus s testom χ^2 , prizkus s palmenjovim celic, "Pijancev" test, Kolmogorov - Smirnov, Širca, RMF, dodatek C.

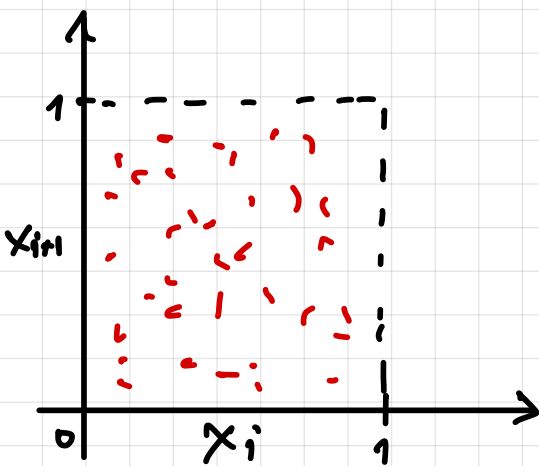
Opomba: Algoritmi s katerimi običajno razpolagamo v programskih jezikih navadno generirajo številu, ki so enakomerno porazdeljena na intervalu $[0, 1]$.

Kaj pričakujemo od dobrega generatorja? *

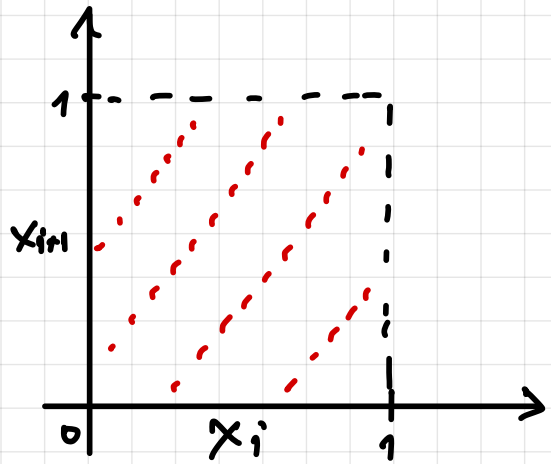
- da so generirana zaporedja števil $\{x_i\}$ med sabo med sabo nekorelirana \rightarrow da so poljubna podzaporedja $\{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}\}$ za vsak k odvisni bolj zibko korelirana.

Npr:

Dobro gen.



Slabo gen.



Primer:

$$x_i = 3x_{i-1} \bmod 31$$

$$x_0 = 9.$$

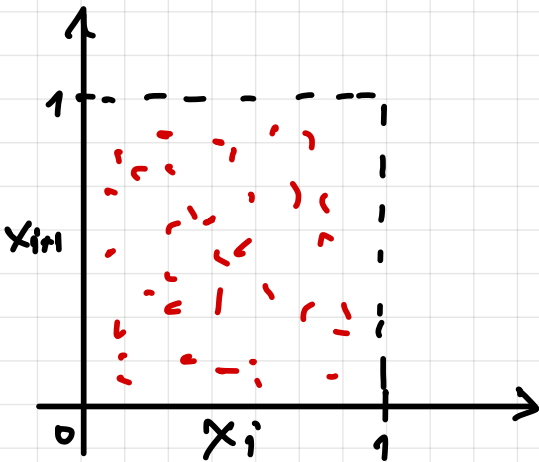
Če bomo kakšen generator uporabili za M.C. integracijo in delovitev plusitve kroga, bomo imeli težave.

- Zeldner, da imajo odm delišo periodo, da se od tem kasnejših pojavijo. Glede na to, da lahko \neq racionalnim predstavimo le končno mnogo števil, se bodo števil prej ali slej pojavila.

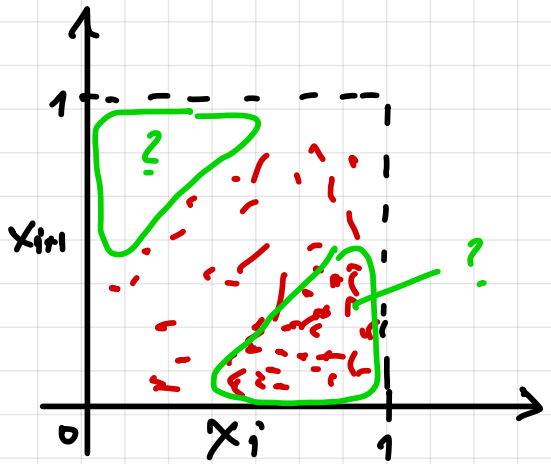
- Zeldner enakomernost in neprotičnost:
Zaključimo enakomerno porazdelitev točk
 $v_i^{(k)} = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1})$ v hiperkocki \rightarrow
odm redjo dimenzija k .

Npr.: za 2D ($k=2$)

Dobro gen.



Slabo gen.



- Zeldner da je rednoštev utrujenost. Če bomo izvajali M.C. integracije z 10^9 točk ne zeldner, da bi se to rednulo v nedogled!

- Vredna enakomernih generatorjev je zasnovana na celostnevalski aritmetiki. Vredajo števila na intervalu $[0, m-1]$, kjer je $m = \underbrace{2^{32}}_{\text{int}}$ oz. $\underbrace{2^{64}}_{\text{long}}$

- Redna števila na $[0, 1]$ potem dobimo s transformacijo:

$$x_i = \frac{z_i}{m-1}$$

Opomba: Tu se lahko skoraj ne uvida zaplete s "gostoto" generiranih števil, saj je množica generiranih števil lahko manjša, kot jih podpira množica realnega podskupinskega tipa! Glej, Širca, RMT, str. 604.

Linearni kongruenčni generatordi (LCG)

(Linearna kongruenca je problem iskanja $z \in \mathbb{Z}$, da velja $az = b \pmod{m}$, kjer $a, b \in \mathbb{Z}$ in $m \in \mathbb{N}$.)

Najbolj pogosto uporabljen generatordi so linearni kongruenčni generatordi, ki jih predstavimo z zvezo:

$$z_{i+1} = (a z_i + c) \pmod{m} \quad 0 \leq z_i \leq m$$

multiplikator minus modul generatordja

$z_0 \equiv z_1 \pmod{m}$ zadnja vrednost - SEME. To si izberemo. Za isto seme dobimo vedno isto reševanje stavl.

Narediti dober generator pač ni dobro izbrati a, c, m , da kar najbolj zadovoljimo kriterijem (*)

Za m se uporablja dva vedno pritekla oblihe $m = 2^p - 1$ (t. i. Mersenneove prime)

Za več glej, Šinca, RMT ali NRC, str. 279)

Zyklad: Generator nam 0 iz HRC

$$Z_{i+1} = (7^5 \cdot x_i + 0) \bmod (2^{31} - 1)$$

Opomba: Obstajajo tudi drugi tipi generatorjev:

- melomomno kongruenčni generatorji
- generatorji tipa "Feedback Shift Register"
- posplošeni FSR - GFSR
- twisted GFSR.

Tega tipa je trenutno najboljši generator
z imenom MERSENNE TWISTER,
ki temelji na Mersennovem prvoštevlu
 $2^{19937} - 1$.

Kvadratna kvadratna stevka:

- Kvadratna kvadratna stevka so $m \times n$ m stevka (x_1, \dots, x_m) , ki so deli euklidskega prostora / imajo n -dimenzionalen prostor — deli euklidskega od kvadratne stevke.
- To kvadratna kvadratna stevka, po vsaki poseben pravilni pravilni izmenični kvadratni stevki — točke se izmenično drugo drugo, da se ne pomakajo in deli euklidskega prostora. Stevke med seboj kvadratna kvadratna (to je bistveno za nas!)
- Uporabne pri delovnih aplikacijah, kjer se pojavljajo notranje konvergenca. — npr. delovni momentov prave delitveni funkciji.
- Primeri: Halpanova rešenja, Sobalova rešenja... (za več, glej NRC, str. 309.)

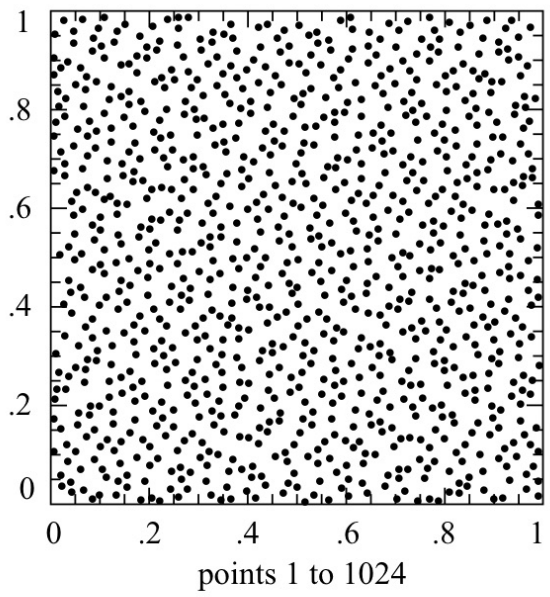
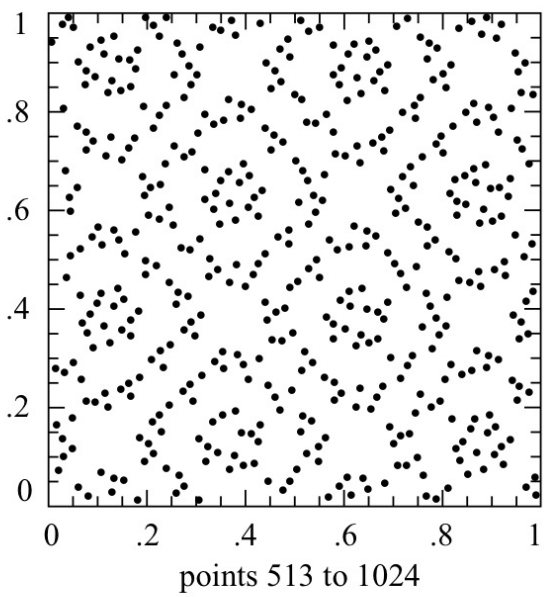
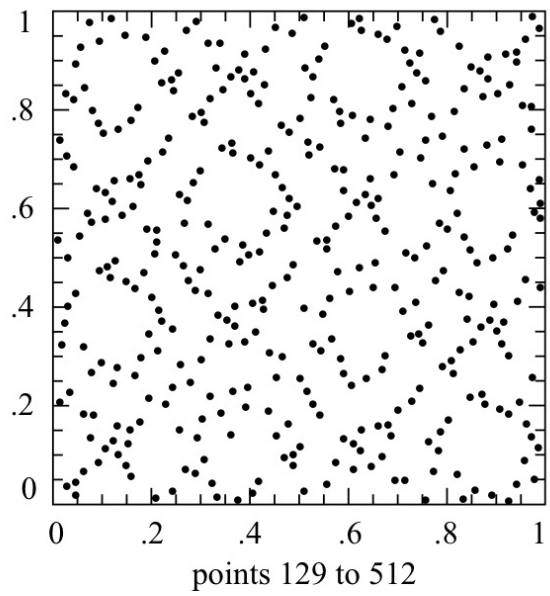
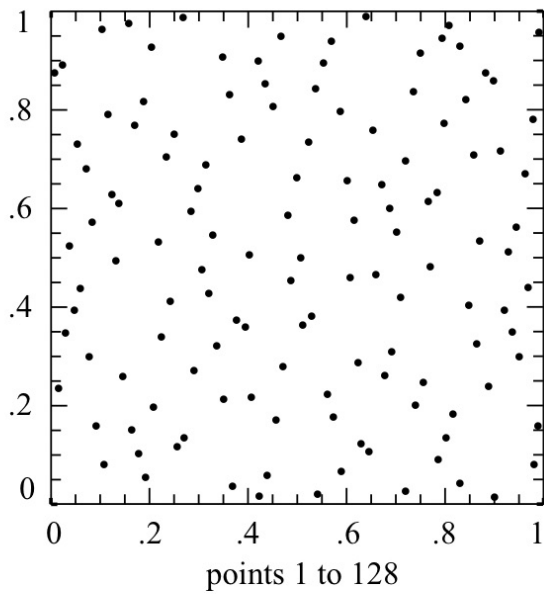


Figure 7.7.1. First 1024 points of a two-dimensional Sobol' sequence. The sequence is generated number-theoretically, rather than randomly, so successive points at any stage "know" how to fill in the gaps in the previously generated distribution.

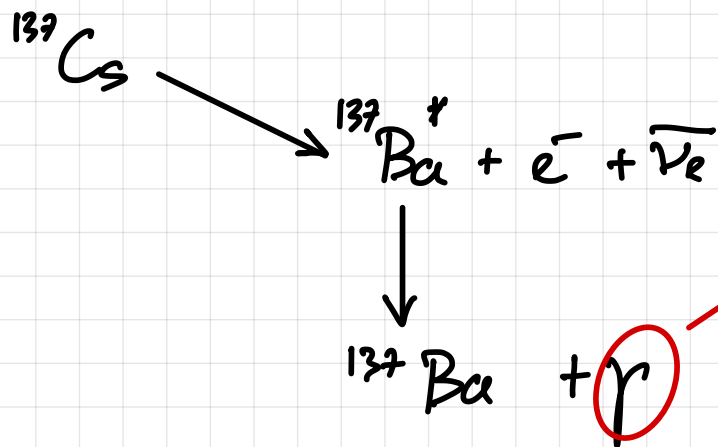
Prova nahljivna števila:

Uporabiti se da tudi prova nahljivna števila.

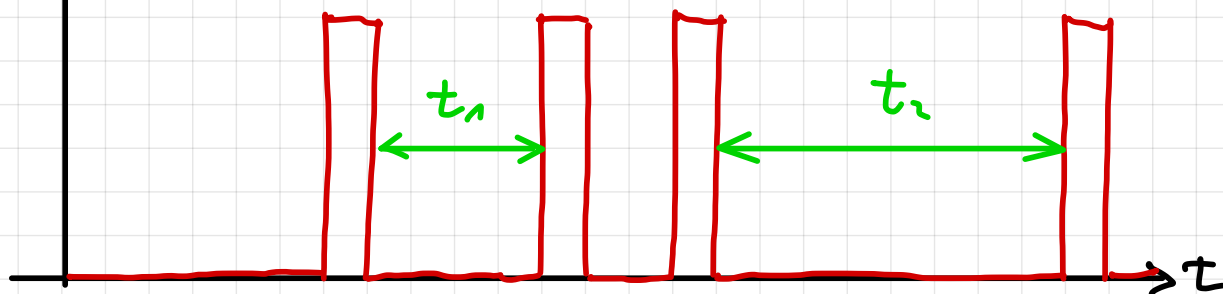
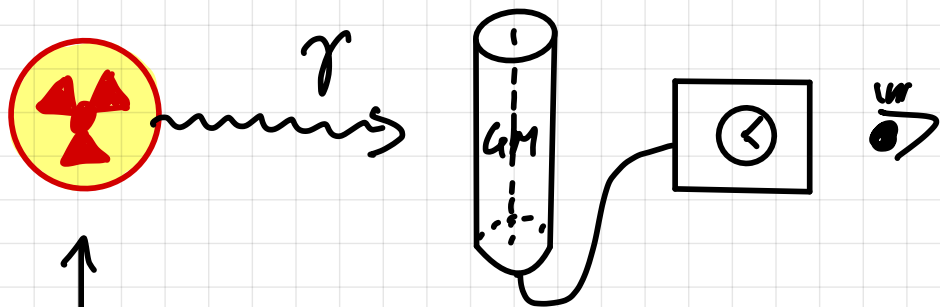
Generatorji: pravi nahljivni števila najpogosteje delujejo na osnovi optičnih redaktorov, za katere vem, da se res dogajajo nahljivno!

Takšna nahljivna števila najdemo na spletni strani:
<http://www.fourmilab.ch/kobsits>.

Spletna stran opazuje zaprte ose uporabnik ^{137}Cs .



17 redaktorjev utira izhajajo žarke γ z energijo 667 keV, ki jih zaznava 4M. det.



Iz primerjave zaporednih osnov tranzij zaporedne bite b_i :

$$b_i = \begin{cases} 1 & ; t_{2i} > t_{2i-1} \\ 0 & ; t_{2i} \leq t_{2i-1} \end{cases}$$

Dobimo sekvence naslednjih bitov:

010110101011000101001.....

byte (8 bitov)

short (16 bitov)

int (32 bitov)

long (64 bitov)

S povečevanjem bitov dobimo postem naslednja celi števila, iz njih pa postam tudi realna.

(Glej zgled!)

Naključna števila porazdeljena po drugih neenakomernih porazdelitvah.

Znamo generirati x , ki so porazdeljena po enakomerni porazdelitvi $f(x) = U(0, 1)$. Iz teh števil bi radi dobili s preslikavo $y = y(x)$ generirane naključna števila y , ki bodo porazdeljena po poljubni drugi porazdelitvi $g(y)$:

$$g(y) > 0 \quad \text{in} \quad \int_{D_y} g(y) dy = 1$$

Metoda z inverzno kumulativno funkcije:

Obratno preslikavo zahteva:

$$dP = |f(x) dx| = |g(y) dy|$$

$$g(y) = f(x) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

Ker je $f(x) = 1$ za $x \in [0, 1]$, je zgorajja enostavna enaka diferencialni enačbi:

$$\frac{dx}{dy} = g(y)$$

Resitev te enačbe je:

$$\underline{x(y)} = \int_{-\infty}^y g(y) dy = \underline{F_y(y)}$$

kumulativna porazdelotvena funkcija!

Od tod sledi, da je transformacija, ki evakujemo porazdeloto preslika v tako, kar je želimo, je:

$$y(x) = F_y^{-1}(x)$$

Glej zgled. →

↑ To je inverz kumulativne funkcije, to ni recipročna vrednost!

Komentar:

Če imamo funkcije $F_y(y)$ in analitično izračunamo, potem izračunamo $x \sim U(0,1)$ nato po preslikavi y pridemo z numeričnim reševanjem enačbe:

$$w(y) = x - F_y(y) = 0$$

↑ To iščemo!

Ni del funkcije $w(y)$ pridemo z npr. bisekcijo!

Zgleds parametris, popadajovih kumulativnih funkcij in njihovih inverzov (Derivaje)

II.2. INVERSION METHOD

$F^{-1}(U)$ can be simplified, by noting for example that $1-U$ is distributed as U .

Density $f(x)$	$F(x)$	$X=F^{-1}(U)$	Simplified form
Exponential(λ) $\lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$	$1 - e^{-\lambda x}$	$-\frac{1}{\lambda} \log(1-U)$	$-\frac{1}{\lambda} \log(U)$
Cauchy(σ) $\frac{\sigma}{\pi(x^2 + \sigma^2)}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{\sigma}\right)$	$\sigma \tan\left(\pi\left(U - \frac{1}{2}\right)\right)$	$\sigma \tan(\pi U)$
Rayleigh(σ) $\frac{x}{\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, x \geq 0$	$1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$	$\sigma \sqrt{-\log(1-U)}$	$\sigma \sqrt{-\log(U)}$
Triangular on $(0, a)$ $\frac{2}{a}\left(1 - \frac{x}{a}\right), 0 \leq x \leq a$	$\frac{2}{a}\left(x - \frac{x^2}{2a}\right)$	$a(1 - \sqrt{1-U})$	$a(1 - \sqrt{U})$
Tail of Rayleigh $\frac{a^2 - x^2}{x^2}, x \geq a > 0$	$1 - e^{-\frac{a^2 - x^2}{2}}$	$\sqrt{a^2 - 2\log(1-U)}$	$\sqrt{a^2 - 2\log U}$
Pareto(a, b) $\frac{ab^a}{x^{a+1}}, x \geq b > 0$	$1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a$	$\frac{b}{(1-U)^{1/a}}$	$\frac{b}{U^{1/a}}$

Zgled:

Iz enakomerno porazdeljenih števil $x \sim U(0,1)$
želimo generirati naključna števila y , ki
so porazdeljena po eksponentni porazdelitvi:

$$g(y) = \lambda \cdot e^{-\lambda y} \quad ; \quad y \in [0, \infty)$$

$$F_y(y) = \int_0^y \lambda e^{-\lambda y} = -e^{-\lambda y} \Big|_0^y = 1 - e^{-\lambda y} = x$$

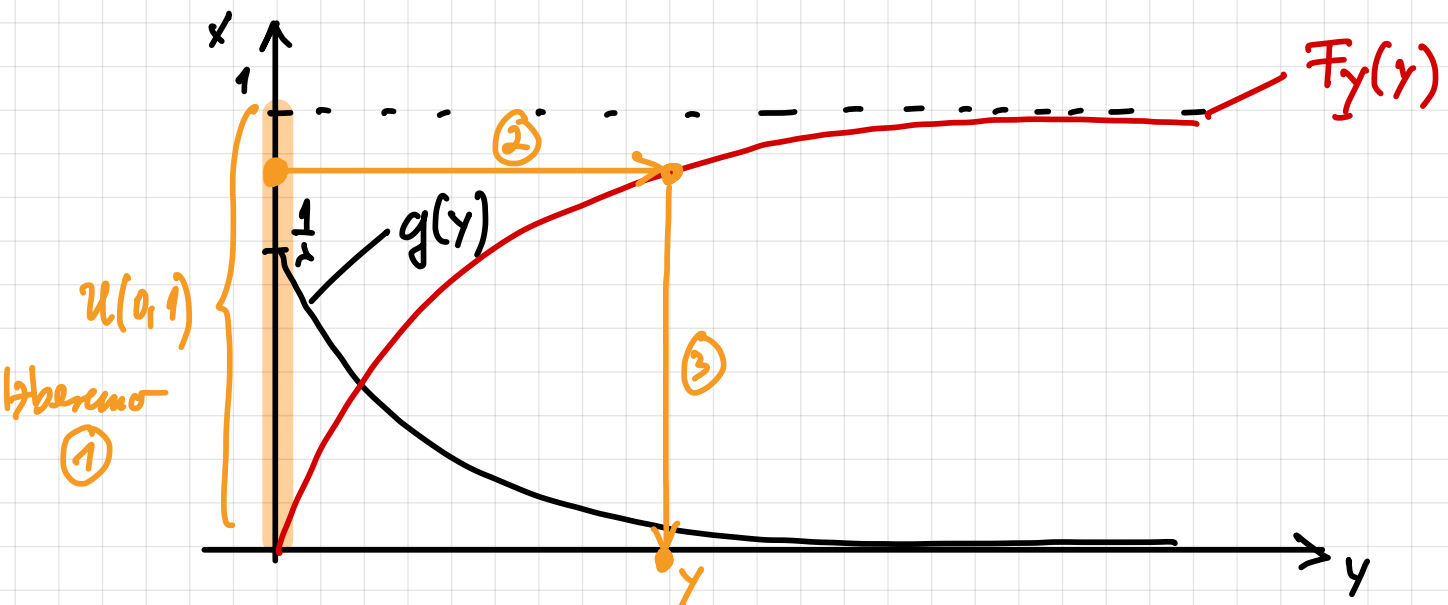
$$e^{-\lambda y} = 1 - x$$

$$y(x) = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1-x)$$

$$= -\frac{1}{\lambda} \ln x$$

(Preobratovljena oblika)

To je enako, kot
je x enako
porazdeljen kot $(1-x)$



Zgled #2:

Generirajmo gaussovsko porazdeljeno število $y \sim$ standard $\sigma = 1$:

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \quad ; \quad y \in (-\infty, \infty)$$

$$F(y) = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{Erf}\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) \right] = x$$

Vemo od zdeljivo

Inverza $F(y)$ ne znamo analitično izračunati, zato rešimo $F(y) - x = 0$ za dano $x \sim U(0, 1)$ iterativno numerično.

boljša metoda (Box-Muller) Glej, Štrecar, VF.

Metoda se zanaša na transformacijo v 2D in deluje precej bolje, kot zgorajja metoda.

Iz žrebca $x_1, x_2 \sim U(0, 1)$ in transform:

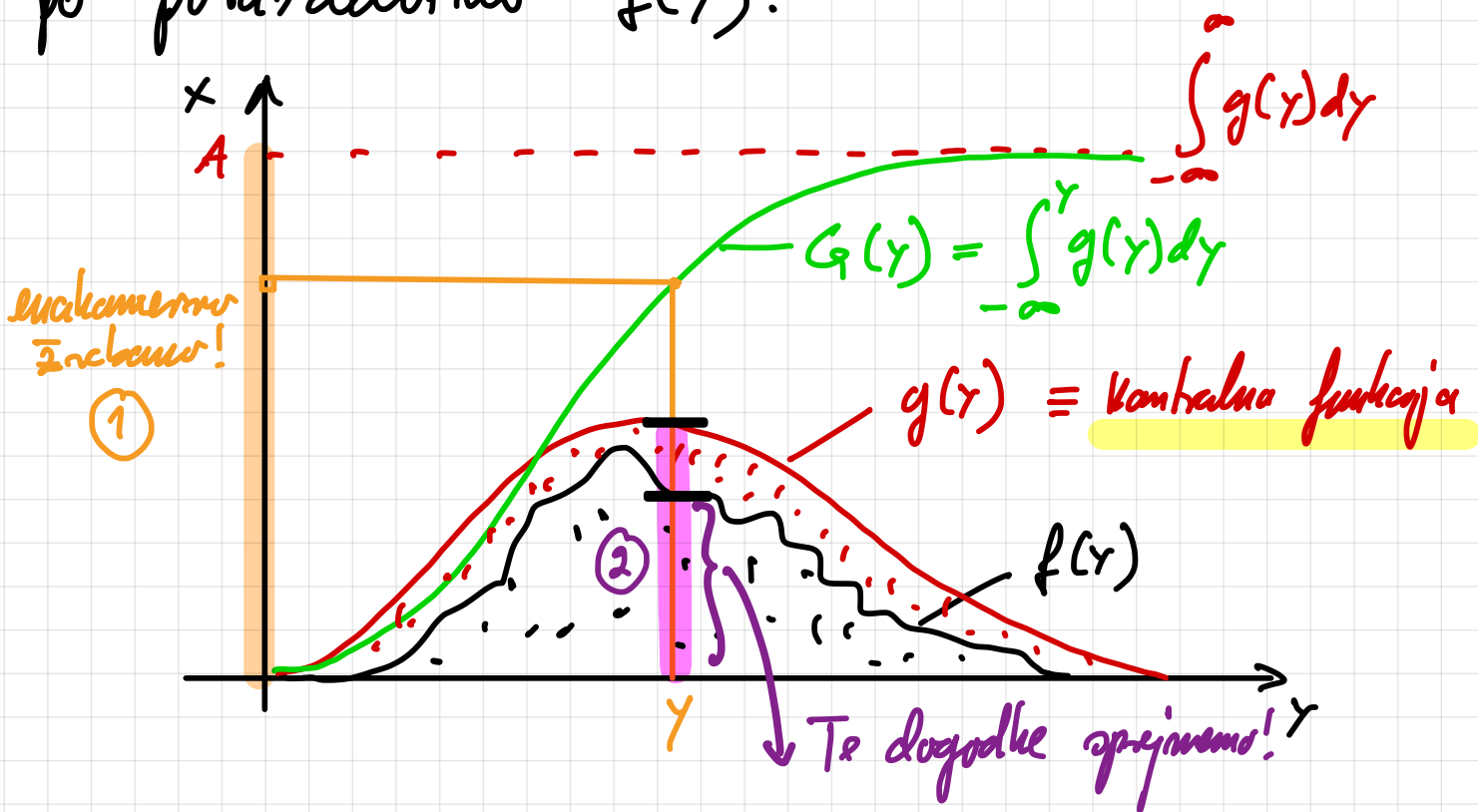
$$y_1 = \sqrt{-2 \ln x_1} \cos 2\pi x_2$$

$$y_2 = \sqrt{-2 \ln x_2} \sin 2\pi x_1$$

y_1 in y_2 sta porazdeljena gaussovsko $\mathcal{N}(0, 1)$
n.o.

Metoda z sorodanjem:

Generirati želeno število y , ki so porazdeljena po porazdelitvi $f(y)$.



Izberemo funkcijo $g(y)$ ki v celoti leži nad porazdelitvijo $f(y)$ in jo dobro poznamo: Znamo izračunati kumulativno funkcijo $G(y)$ in njen inverz $G^{-1}(x)$. Metoda dela dveh korakov.

- 1.) Najprej naključno generiramo točko v ravnini (y, x) , ki so enakomerno porazdeljene po površini pod funkcijo $g(y)$.
- 2.) Če je točka tudi pod $f(y)$ jo sprejmemo, drugače jo zavržemo! Koordinata y sprejetih točk, so porazdeljene po $f(y)$.

1.) Točke euklidski porazdeljene pod $g(y)$ dobimo tako da izberemo $x_1 \sim A \cdot U(0,1)$. Nato preko kumulativne funkcije dobimo porazdelitev y .
Rešimo enačbo:

$$\xi = F(y) \quad \text{odkjer:} \quad y = F^{-1}(\xi)$$

Nato generiramo drugo koordinato kot $x \sim g(y) \cdot U(0,1)$

Točke (y, x) so euklidski porazdeljene pod $g(y)$.

2.) Točka sprejmeta, da velja $y < f(x)$.

Limitni primer:

$g(y)$ je konstantna funkcija z vrednostjo g_0 :

$$g(y) = \begin{cases} g_0 & ; \quad y \in D_f = [a, b] \\ 0 & ; \quad \text{sker} \quad (\text{definicijsko območje } f) \end{cases}$$

$$\text{Integral konstantne funkcije: } A = \int_a^b g(y) dy = g_0 (b-a)$$

Kumulativna funkcija in delovitev γ :

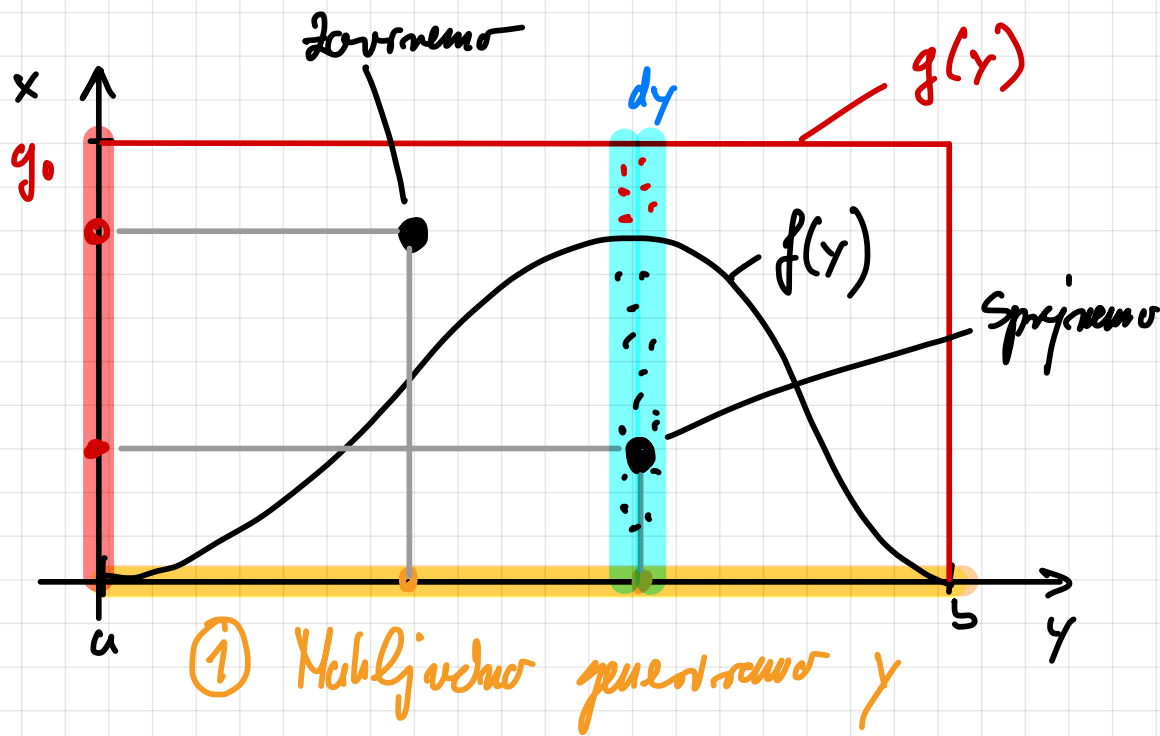
$$G(y) = \int_a^y g_0 dy = \underbrace{g_0 (y - a)}_{\xi} \sim A \cdot U(a, 1)$$

$$y = \frac{\xi}{g_0} + a$$

y je v tem primeru tudi enakomerno porazdeljen med $[a, b]$.

Generiramo $x \sim g_0 \cdot U(0, 1)$. Če je par (y, x) velja, da je $x < f(y)$, potem y sprejmemo, drugače zavržemo!

② Nahljvano generiramo x .



Komentar: Ideja, ki jo obrtni vidijo, je ta, da na intervalu širine dy pri y deliž splošnih točk enak verjetnosti

$$dP = f(y) dy$$

Recept: (za metodu "wt and ntos")

1.) Izberemo $g_0 > f(y)$ za $\forall y \in [a, b]$.

2.) Po enakomernem porazdelitvam $U(a, b)$ izberemo y :
Elemenarna.

$$y = (a - b) U(0, 1) + a$$

3.) Po enakomernem porazdelitvam $U(0, g_0)$ izberemo x :

$$x = g_0 U(0, 1)$$

4.) Če je $y < f(x)$, potem y sprejmemo,
drugode y zavržemo

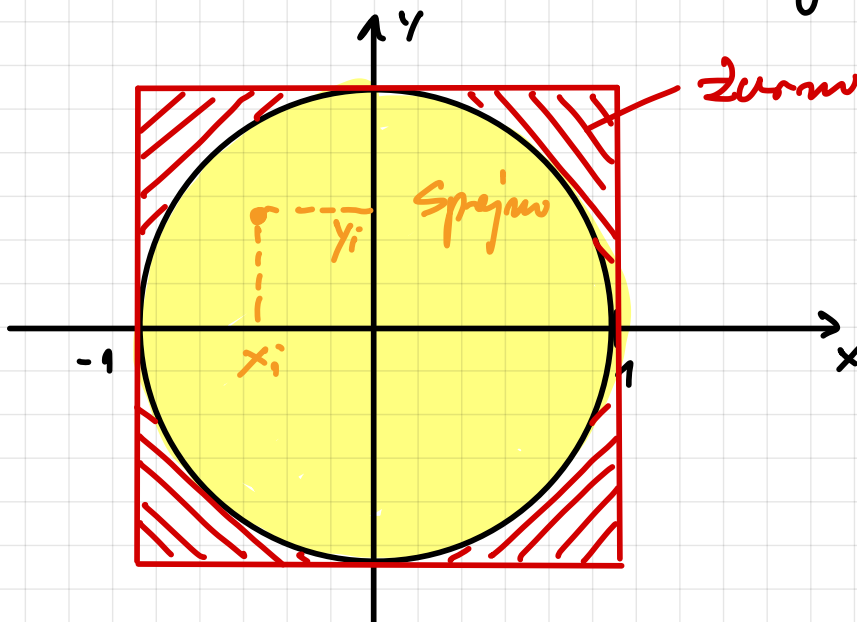
5.) Ponovimo.

Pozor: Metoda je zelo enostavna, a zelo počasna.
Ne deluje dobro, ko $a, b \rightarrow \pm \infty$.

Dodatek: Īrebaņje števl ma euotšhem kroņņ:

kaku Īzrebaņts tode, ku oš euakomeņro porođeljeņe po moņraņjostē euotšheģa kroņņ.

- A.) Labku pastopamo po vāroņ metode "hit and miss". Ģenerāroņ poro ma kvodratē, ku ošbe euotšheģa kroņņ ku zaružemoņ tode, ku oš rakuģ kroņņ:

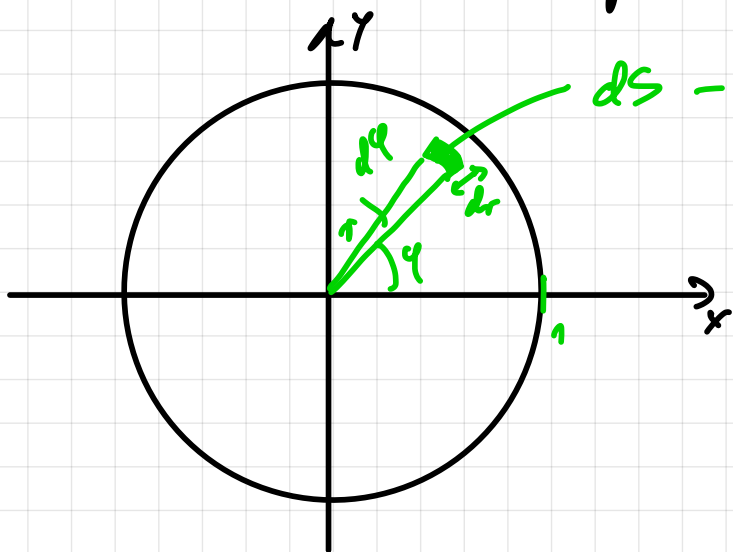


$$x_i = 2 \cdot \mathcal{U}(0,1) - 1$$

$$y_i = 2 \cdot \mathcal{U}(0,1) - 1$$

Por (x_i, y_i) obdiņņro, de $x_i^2 + y_i^2 \leq 1$

B.) Lahko pa postopamo tudi drugje in
 računamo v polarnih koordinatah.



dS - ploščina enega diferencialnega
 koščka.

Izhajamo iz verjetnostnega združenja:

$$\frac{dP}{dS} = \frac{1}{S} = \frac{1}{\pi \cdot 1^2} = \frac{dP}{r dr d\varphi} = \frac{dP}{d(r^2) \frac{1}{2} d\varphi}$$

Hotemo enakomerno
 porazdelitev.

$$dP = 1 \cdot \underbrace{d(r^2)}_{\text{red}} \underbrace{d\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)}_{\text{red}}$$

To moramo biti porazdeljemo
 po enakih porazdelitvah!

Sledi: u_1, u_2 generiramo po $\mathcal{U}(0, 1)$

$$r = \sqrt{u_1} \quad , \quad \varphi = 2\pi u_2$$

Integracija z metodo Monte Carlo

Izračunati želimo določen integral:

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Iz verjetnosti in statistike uporabimo naslednje točki: Imejmo naključno spremenljivko X , ki je porazdeljena po zvezni porazdelitvi $p(x)$. Zanimati nas pričakovana vrednost izbrane funkcije $g(x)$. Velja:

$$E[g(x)] = \int_{D_p} g(x) p(x) dx \leftarrow \begin{array}{l} \text{Glej del o verjetnosti.} \\ \text{Tudi smo tu upeljali.} \end{array}$$

Če rečemo, da je $p(x)$ enakomerna porazdelitev na intervalu $[a, b]$:

$$p(x) = U(a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & ; a \leq x \leq b \\ 0 & ; \text{nič,} \end{cases} \quad (*)$$

potem velja:

$$E[g(x)] = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx$$

Če se vedno, da je $g(x) = f(x)$, potem:

$$E[f(x)] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{I}{b-a}$$

Oziroma:

$$I = (b-a) \cdot E[f(x)]$$

Tega ne znamo izračunati, zivamo pa oceniti v okviru statistične analize, kjer smo predhodno vrednost spremenljive spredlozmerila z vzorčnim povprečjem:

$$I \doteq \hat{I} = (b-a) \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i),$$

= \bar{f} vzorčni povprečje.

kjer so x_i naključne vrednosti, izbrane slučajno z enakomernim porazdelitvijo $U(a,b)$.

Kaj smo o tem dosegli? Problem redukcija integrala smo prevedli na statistični problem izvedenja pričakovane vrednosti $E[f(x)]$, kjer je oprabljenost samo z ugotovitvijo povprečja f .

• Ocena \hat{I} je neprobna:

$$E[\hat{I}] = E\left[(b-a) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)\right] = (b-a) \frac{1}{n} \cdot n \cdot E[f(x)]$$

$$= (b-a) \cdot E[f(x)] \quad \leftarrow \text{Glej nizej}$$

• Varianca \hat{I} pa je:

$$\text{Var}[\hat{I}] = \frac{(b-a)^2}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n \text{Var}[f(x_i)] = \frac{(b-a)^2}{n} \cdot \text{Var}[f(x)]$$

$$= \frac{(b-a)^2}{n} \cdot \int_a^b \underbrace{(f(x) - E[f(x)])^2}_{\text{povprečje}} \cdot \underbrace{\frac{1}{b-a}}_{\text{praznilnik}} \cdot dx$$

• Vzorčni varianci jo potem:

$$S_{\hat{I}}^2 = \frac{S_f^2}{n} (b-a)^2 = \frac{(b-a)^2}{n(n-1)} \cdot \left(\sum_{i=1}^n f(x_i)^2 - \sum_{i=1}^n \bar{f} \right)$$

$$S_{\hat{I}}^2 = \frac{(b-a)^2}{n-1} \cdot (\bar{f}^2 - \bar{f}^2)$$

Od tod dobimo oceno integrala & napako

$$I = \hat{I} \pm \sqrt{S_I^2}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \underbrace{(b-a)}_{\text{prosejpa po volumnu.}} \cdot \bar{f} \pm \frac{(b-a)}{\sqrt{n-1}} \cdot \sqrt{\overline{f^2} - \bar{f}^2}$$

↓ Napaka pada s korenjem!
To pomeni, da če želimo
statistično napako
popraviti, potrebujemo 4x
večji vzorec!

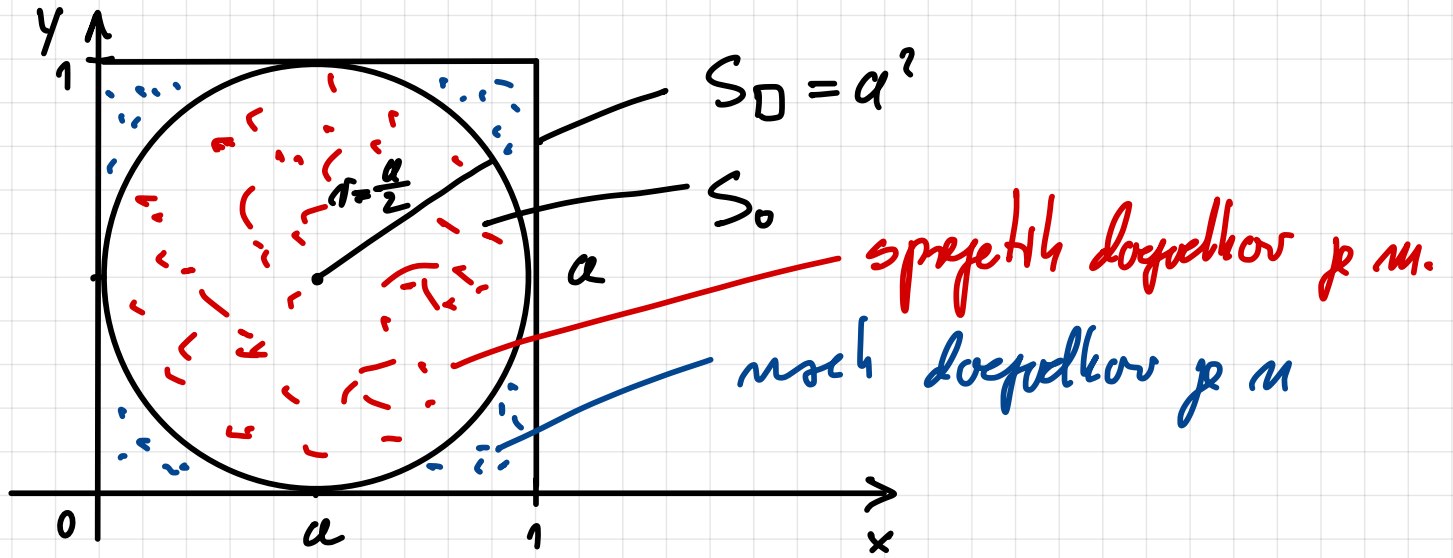
To je velikost naše domene D , ki je v 1D daljica.
V več dimenzijah gre D za množico s
ploščinami S , volumni V, \dots ! V spletnem zbirniku:

$$\int_V f dV = V \cdot \bar{f} \pm \frac{V}{\sqrt{n-1}} \cdot \sqrt{\overline{f^2} - \bar{f}^2} = \sigma_1$$

prosejpa po volumnu. ϵ **

Ta formula je osnovna vsi M.C. metodi.

Zad: Izračunaj površino kroga s polmerom $a=1$ z metodo Monte Carlo.



Površina kroga izračunamo:

$$S_0 = \int_{S_0} 1 \cdot dS = \left| \begin{array}{l} \text{Prevedemo na} \\ \text{integral po} \\ \text{površini } S_0 \end{array} \right| = \int_{S_0} f(x,y) dS$$

Funkcija $f(x,y)$ pene, ali samo znotraj kroga, ali ne.

$$f(x,y) = \begin{cases} 1; & (x - \frac{a}{2})^2 + (y - \frac{a}{2})^2 \leq (\frac{a}{2})^2 \\ 0; & \text{obč} \end{cases}$$

Izbrano zvezno porazdelitev v 2D $p(x,y)$, ki je enakomerna po površini kvadrata s površino $S_D = a^2$.

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{a^2} & ; 0 \leq x,y \leq a \\ 0 & ; \text{ster.} \end{cases}$$

Potem sledijo z $(**)$ lahko zapišemo:

$$\int_{S_D} f(x,y) dS = \int_0^a \int_0^a f(x,y) dS = a^2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) = a^2 \frac{\frac{nm}{n}}{n}$$

$$\bar{f}^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f^2(x_i) = \frac{nm}{n} = p$$

Resničnejše sprejetih vs. vseh dogodkov.

$$\sigma_1^2 = a^4 \cdot (\bar{f}^2 - \bar{f}^2) = a^4 \cdot \left(\frac{nm}{n} - \frac{nm^2}{n^2} \right) =$$

$$= a^4 p (1-p)$$

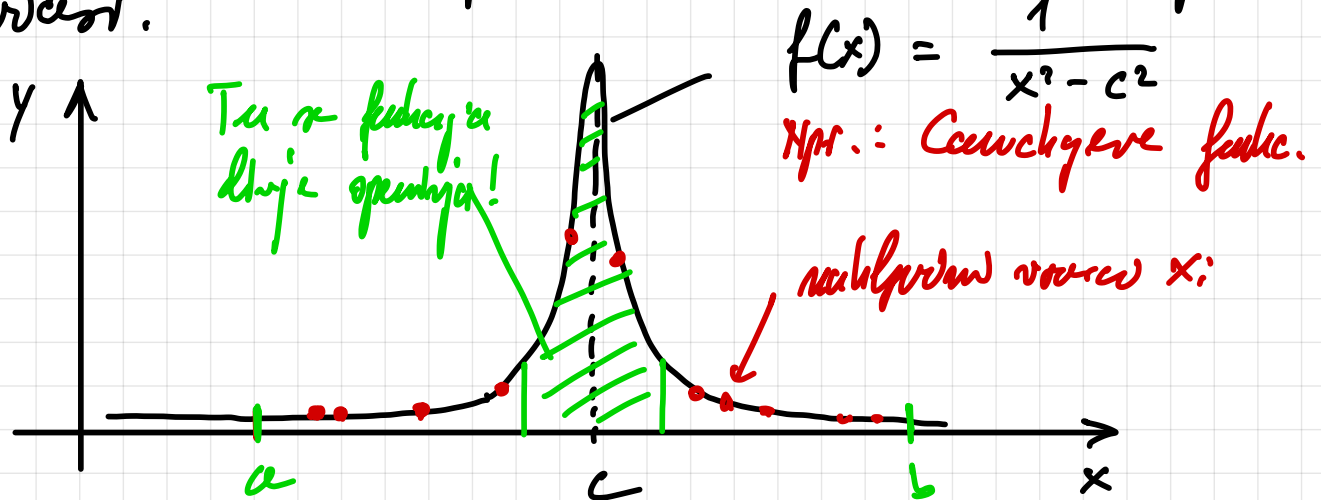
To je nepopoln izbrano porazdelitev, kar je pričakovano.

Od tega dobimo:

$$\epsilon = \frac{a^2 \cdot \sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n-1}}$$

Prednostno vzorčenje (ang. Importance sampling)

Izračunamo želimo integral funkcije $f(x)$, ki
se dvije spremijaja le na majhnem delu
definijskega območja, drugod pa se spremijaja
le počasi.



Če $[a, b]$ vsebuje enolično vrednost, katero bomo
preizkušali vredno na območju, kjer se funkcija
spremijaja in zmedno prispeva k integralu. Posledično
dobimo z metodo M.C. nezanesljivo vrednost.
Težavo risimo s prednostnim vzorčenjem:

$$I = \int_a^b f(x) dx = (b-a) \cdot \int_a^b f(x) \cdot \underbrace{u(x)}_{\text{enolična porazdelitev}} dx$$

To smo prevedli na enolično porazdelitev parametrov porazdelitev.

$$I = \int_a^b \underbrace{(b-a)}_{\frac{1}{u(x)}} f(x) u(x) dx \stackrel{\circ}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (b-a) f(x_i)$$

Nebo ocena na kvadratu vrata!

x_i smo izbrali po enakomerni porazdelitvi!

Ideja prednostnega vrzdenja je ta, da $u(x)$ zamenjamo s porazdelitvijo $w(x)$, ki je bolj priljubljena $f(x)$. Seveda moramo veljati:

$$w(x) \geq 0 \quad \forall x \in D_w \quad \text{in} \quad \int_{D_w} w(x) dx = 1.$$

Zapišemo:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left(\frac{f(x)}{w(x)} \right) \cdot w(x) dx$$

$$= \int_a^b g(x) w(x) dx \stackrel{\circ}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{w(x_i)}$$

Tu so zdaj x_i porazdeljeni po porazdelitvi $w(x)$. S tem dobimo več vrzov tem, kjer jih potrebujemo.

Zaključek: $g(x) = \frac{f(x)}{w(x)} < \infty$

(Vzoredna) varianca integrala:

$$S_I^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \left(\overline{g^2} - \overline{g}^2 \right) = \frac{1}{n-1} \cdot \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i)^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i) \right)^2 \right]$$

Da se pokaže, da varianca tem manjša tem bolj
je $w(x)$ podobna $f(x)$.

I

← To je prava vrednost
integrala, ki je sicer
ne poznamo!

Zaprišemo varianca, nato pa
z varnacijsko metodo in uporabo
Lagrangeovega multiplikatorja
določimo tak $w(x)$, da je
varianca minimalna.

Glej Sima, RMF.

V limiti $w(x) = \frac{f(x)}{I}$: $g(x) = \frac{f(x)}{f(x)} \cdot I$

$$S_I^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \left[\underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I^2}_{n I^2} - \underbrace{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I \right)^2}_{\frac{1}{n} \cdot n I} \right] = \frac{1}{n-1} \left[I^2 - I^2 \right] = \underline{\underline{0}}$$

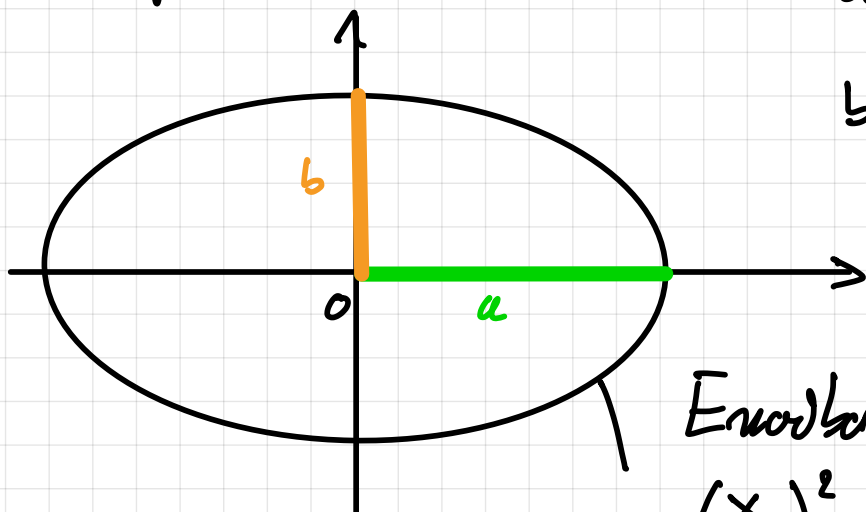
Če bi pozvedli I in bi znebili dopolnje po $w(x)$,
bi imeli enak oblik kot $f(x)$, bi M.C. integracija
dalec varianca 0.

Opomba:

Obstaja, da vnsauca pada, ko $w(x) \rightarrow f(x)/I$,
pri rotiranju pozitivne, kjer je bila
vnsauca n δ v prometu, da je bilo
območje izračuna dogodkov enakov površini
loka ($p = 1$).

Napohán za Nalaejo #3:

1.) Elopsa:



$a \equiv$ "Velika pol os"

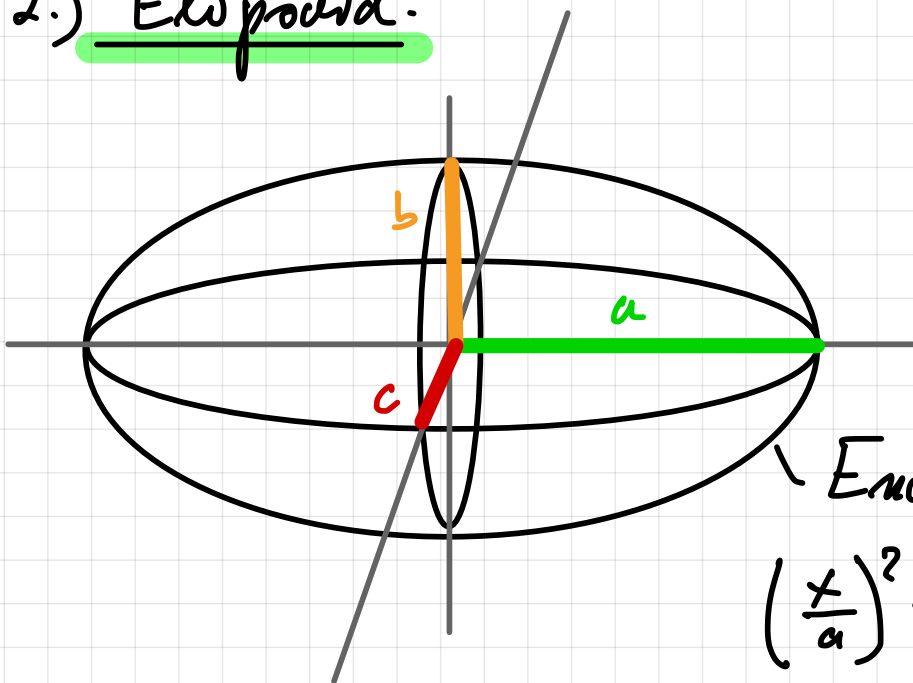
$b \equiv$ "Mala pol os"

Enoška elipse:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Plústina: $S = \pi \cdot a \cdot b$

2.) Elipsoid:



Enoška elipsoida:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

Volumen:

$$V = \frac{4}{3} \pi abc$$