Fourierova analiza

4. 5. 2022

Matematično-fizikalni seminar 2021/22

10. naloga: Fourierova analiza

Pri numeričnem izračunavanju Fourierove transformacije

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(2\pi i f t)\, dt \tag{1}$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \exp(-2\pi i f t)\, df \tag{2}$$

je funkcija $h(t)$ običajno predstavljena s tablico diskretnih vrednosti

$$h_k = h(t_k), \quad t_k = k\Delta, \quad k = 0, 1, 2, \dots N-1. \tag{3}$$

Pravimo, da smo funkcijo vzorčili z vzorčno gostoto $1/\Delta$. Za tako definiran vzorcu obstaja naravna meja frekvenčnega spektra, ki se imenuje *Nyquistova frekvenca*, $f_c = 1/(2\Delta)$: harmonični val s to frekvenco ima v naši vzorčni gostoti ravno dva vzorca v periodi. če ima funkcija $h(t)$ frekvenčni spekter omejen na interval $[-f_c, f_c]$, potem ji z vzorčenjem nismo odvzeli nič informacije: kadar pa se spekter razteza izven intervala, pride do *potujitve* (*aliasing*), ko se zunanji del spektra preslika v interval.

Frekvenčni spekter vzorčene funkcije (3) spet računamo samo v N točkah, če hočemo, da se ohrani količina informacije. Vpeljemo vsoto

$$H_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \exp(2\pi i k n/N), \qquad n = -N/2, \dots, N/2, \tag{4}$$

ki jo imenujemo diskretna Fourierova transformacija, in je povezana s funkcijo v (1) takole:

$$H(n/(N\Delta)) \approx \Delta \cdot H_n.$$

Zaradi potujitve, po kateri je $H_{-n} = H_{N-n}$, lahko mirno pustimo indeks n v enačbi (4) teči tudi od 0 do N. Spodnja polovica tako definiranega spektra ($1 \le n \le \frac{N}{2} - 1$) ustreza pozitivnim frekvencam $0 < f < f_c$, gornja polovica ($\frac{N}{2} + 1 \le N - 1$) pa negativnim, $-f_c < f < 0$. Posebna vrednost pri $n = 0$ ustreza frekvenci nič ("istosmerna komponenta"), vrednost pri $n = N/2$ pa ustreza tako f_c kot $-f_c$.

Količine h in H so v splošnem kompleksne, simetrija v enih povzroči tudi simetrijo v drugih. Posebej zanimivi so trije primeri:

če je	h_k realna	tedaj je	$H_{N-n} = H_n^*$
	h_k realna in soda		H_n realna in soda
	h_k realna in liha		H_n imaginarna in liha

(ostalih ni težko izpeljati). V tesni zvezi s frekvenčnim spektrom je tudi moč. *Celotna moč* nekega signala je neodvisna od reprezentacije, Parsevalova enačba pove

$$\sum_{k=0}^{N-1} |h_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |H_n|^2$$

(lahko preveriš). Pogosto pa nas bolj zanima, koliko moči je vsebovane v frekvenčni komponenti med f in $f + \mathrm{d}f$, zato definiramo enostransko spektralno gostoto moči (*one-sided power spectral density*, PSD)

$$P_n = |H_n|^2 + |H_{N-n}|^2 \, .$$

Pozor: s takšno definicijo v isti koš mečemo negativne in pozitivne frekvence, vendar sta pri realnih signalih h_k prispevka enaka, tako da je $P_n = 2\,|H_n|^2$.

Z diskretno obratno transformacijo lahko rekonstruiramo h_k iz H_n

$$h_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_n \exp(-2\pi i k n/N). \tag{5}$$

Količine h in H so v splošnem kompleksne, simetrija v enih povzroči tudi simetrijo v drugih. Za realne h so H paroma konjugirani, $H(-f) = H(f)^*$.

Nalogi:

- Izračunaj Fourierov obrat nekaj enostavnih vzorcev, npr. raznih mešanic izbranih frekvenc. Primerjaj rezultate, ko je vzorec v intervalu periodičen (izbrane frekvence so mnogokratniki osnovne frekvence), z rezultati, ko vzorec ni periodičen. Opazuj pojav potujitve na vzorcu, ki vsebuje frekvence nad Nyquistovo frekvenco. Napravi še obratno transformacijo (5) in preveri natančnost metode.

- Signalu v datoteki `PodatkiFourier.dat` [1] določi frekvenčni spekter. Kako se spremeni spekter, če analiziramo krajše intervale (64, 128, … točk)? Kako se spremeni spekter, če v analizi upoštevamo vsako 2, 4, … točko?

[1]Podatke najdeš v Spletni učilnici predmeta

Fourierova transformacija:

Razvoj fizikalnega problema navadno opazujemo v časovni domeni in ga predstavimo z neko funkcijo $h(t)$, ki je odvisna od časa. Lahko pa ga opazujemo v frekvenčni domeni, kjer problem opišemo s kompleksno funkcijo $H(f)$, ki je funkcija frekvence $f \in (-\infty, \infty)$. Ove reprezentaciji problema povezuje Fourierova transformacija:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-2\pi i f t}\, dt$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)\, e^{2\pi i f t}\, df$$

Opomba: Fourierova transformacija je linearna operacija

Fourierova analiza

Fourierova analiza je fizikalna/matematična analiza, ki se naslanja osnovna ključna lastnosti Fourierove transformacije.

Uporabimo jo pri problemih, kjer nam Fourierova transformacija pride prav kot matematično orodje za lažje reševanje izbranih problemov, npr.

- Računanje konvolucij
- Reševanje parcialnih diferencialnih enačb.
  (Glej, I. Vidav, Višja matematika III.)

Lotimo se je pa predvsem takrat, ko nas dejansko zanimajo lastnosti Fourierove transformiranke, ker ta pripoveduje fizikalno zanimivo vsebino, npr:

- spekter pridobljen iz interferograma nosi informacijo o lastnostih svetila, ki ga opazujemo.

Lastnosti Fourierove transformacije:

Če funkcija $h(t)$ izkazuje določene simetrijske lastnosti, potem se te odražajo v lastnostih Fourierove transformiranke $H(f)$:

If...	then...
1. $h(t)$ is real	$H(-f) = [H(f)]^*$
2. $h(t)$ is imaginary	$H(-f) = -[H(f)]^*$
3. $h(t)$ is even	$H(-f) = H(f)$ [i.e., $H(f)$ is even]
4. $h(t)$ is odd	$H(-f) = -H(f)$ [i.e., $H(f)$ is odd]
5. $h(t)$ is real and even	$H(f)$ is real and even
6. $h(t)$ is real and odd	$H(f)$ is imaginary and odd
7. $h(t)$ is imaginary and even	$H(f)$ is imaginary and even
8. $h(t)$ is imaginary and odd	$H(f)$ is real and odd

Preverimo 1.:

Če je $h(t)$ realna, velja: $h^*(t) = h(t)$.

Računajmo:

$$\underline{H(f)^*} = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(t)\, e^{+2\pi i f t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-2\pi i (-f) t}\, dt = \underline{H(-f)}$$

Preverimo 4:

Če je $h(t)$ liha, velja: $h(-t) = -h(t)$:

$$\underline{H(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-2\pi i f t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} -h(-t)\, e^{+2\pi i f t}\, dt = \left| \begin{array}{l} t' = -t \\ dt' = -dt \end{array} \right| =$$

$$= \int_{\infty}^{-\infty} h(t')\, e^{-2\pi i f t'}\, dt' = -\int_{-\infty}^{\infty} h(t')\, e^{-2\pi i f t'}\, dt' = \underline{-H(f)}$$

Če je $h(t)$ liha, potem je tudi $H(f)$ liha!

Preverimo 6. : Če je $h(t)$ realen in lih, potem:

$$\underline{H^*(f)} = H(-f) = -\underline{H(f)} \Rightarrow H(f) \text{ je imaginaren.}$$

$H = x + iy$: $\quad H^* = x - iy = -(x + iy)$

$$x - \cancel{iy} = -x - \cancel{iy}$$

$$2x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 0}}$$

Veljajo še nekatere druge lastnosti FT:

Here are some other elementary properties of the Fourier transform. (We'll use the "$\Longleftrightarrow$" symbol to indicate transform pairs.) If

$$\boxed{h(t) \Longleftrightarrow H(f)}$$

is such a pair, then other transform pairs are

$$h(at) \Longleftrightarrow \frac{1}{|a|} H\left(\frac{f}{a}\right) \qquad \text{"time scaling"} \qquad (12.0.4)$$

$$\frac{1}{|b|} h\left(\frac{t}{b}\right) \Longleftrightarrow H(bf) \qquad \text{"frequency scaling"} \qquad (12.0.5)$$

$$h(t - t_0) \Longleftrightarrow H(f)\, e^{2\pi i f t_0} \qquad \text{"time shifting"} \qquad (12.0.6)$$

$$h(t)\, e^{-2\pi i f_0 t} \Longleftrightarrow H(f - f_0) \qquad \text{"frequency shifting"} \qquad (12.0.7)$$

Spomni se težav pri Fourierovi spektroskopiji pri Praktikumu 6.

Premik v času:

Kaj se zgodi s Fourierovo transformiranko, če signal premaknemo v času.

$$h(t) \longrightarrow g(t) = h(t+\tau)$$

Zapišimo (po definiciji) transformacijo obeh strani:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)\, e^{+2\pi i t f}\, df = h(t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)\, e^{+2\pi i (t+\tau) f}\, df$$

Od tod vidimo:

$$G(f) = H(f) \cdot e^{+2\pi i \tau f}$$

Fourierova transformiranka dobi dodatno modulacijo

Parsevalova enačba:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 \, df$$

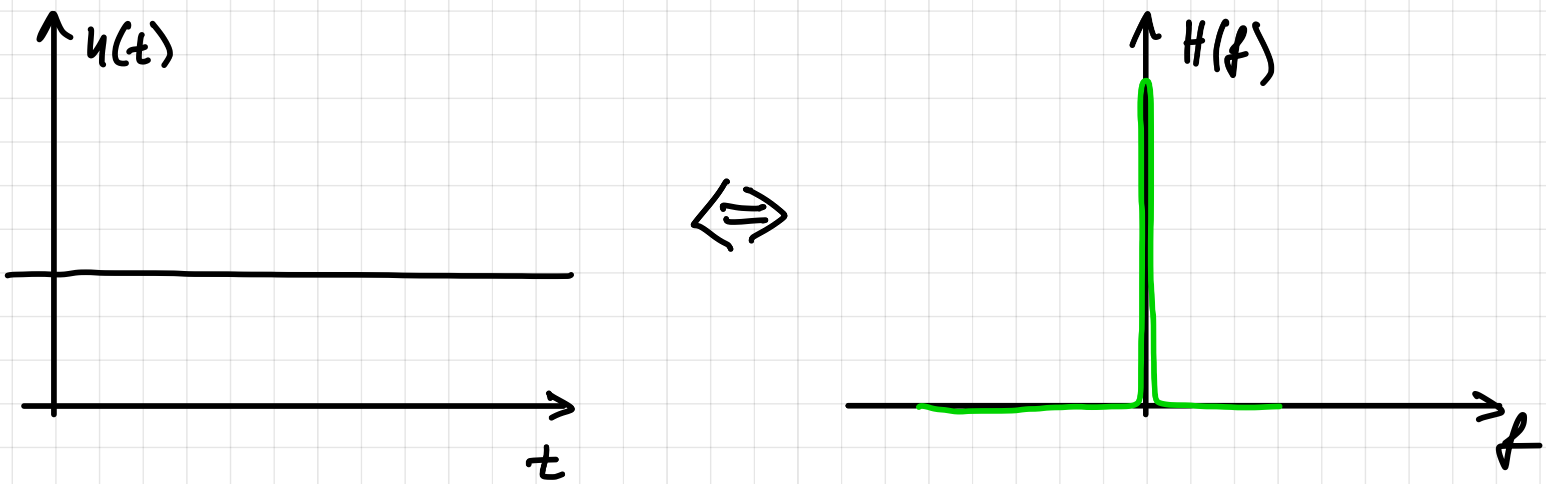
Interpretacija Parsevalove enačbe: Celotna moč v signalu, ki jo izračunamo v časovnem domenu je enaka tisti, ki jo izračunamo v frekvenčnem območju: Moč signala se pri Fourierovi transformaciji ohranja.

Glej: I. Vidav, Višja matematika III, str. 120.

Zgled #1: Fourierova transformacija konstantnega signala:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-2\pi i f t}\, dt = \left| \text{Spomnimo se: } \delta(f-\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it(f-\alpha)}\, dt \right| =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} 1\, e^{\overbrace{-2\pi i f t}^{t'}} \frac{\overbrace{(-dt)\,2\pi}^{dt'}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ift'}\, dt' = \delta(f-0)$$



Deluje tudi obratno:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f-0)\, e^{i2\pi f t}\, df = e^{i2\pi 0} = 1$$

Zgled #2: Fourierova transformiranka je realna (in soda) delta funkcija pri izbrani frekvenci f_0, i.e., ima realno frekvenco.

$$H(f) = \underbrace{\delta(|f-f_0|)}_{\text{Realna in soda.}} + 0i$$

Uporabimo 2x zgled 1.

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)\, e^{2\pi i f t}\, df = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(|f-f_0|)\, e^{2\pi i f t}\, df =$$

$$= e^{2\pi i f_0 t} + e^{-2\pi i f_0 t} = 2 \cdot \frac{e^{2\pi i f_0 t} + e^{-2\pi i f_0 t}}{2}$$

$$= 2\cos(2\pi f_0 t)$$

Kosinusni signal z eno samo frekvenco.

Zgled #3: Fourierova transformacija Gaussove funkcije:

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-2\pi i f t} \, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\underbrace{-\left(\frac{t^2}{2} + 2\pi i f t\right)}_{(*)}} dt$$

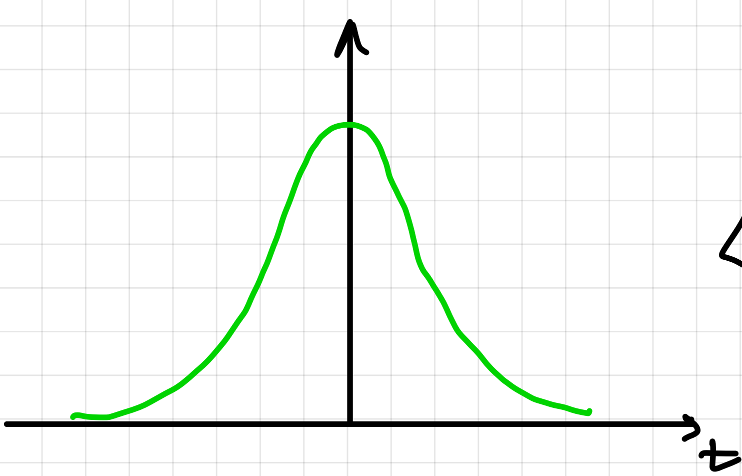
(*) Dopolnimo do popolnega kvadrata:

$$\frac{t^2}{2} - 2\pi i f t = \frac{1}{2}\left(t^2 - 4\pi i f t\right) =$$

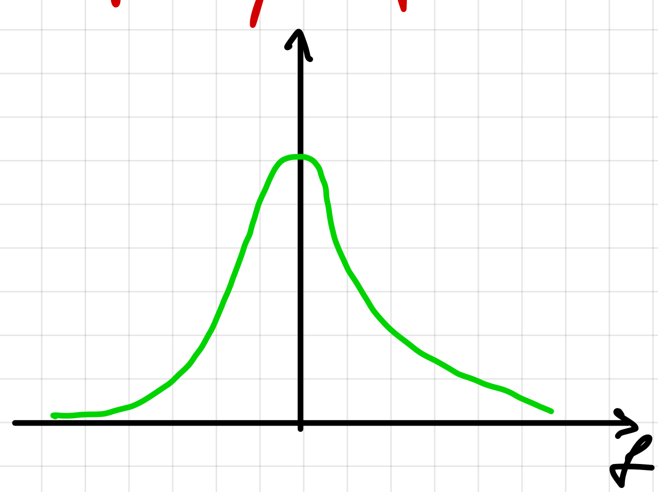
$$= \frac{1}{2}\left(t^2 - 4\pi i f t - 4\pi^2 f^2\right) + 2\pi^2 f^2 = \frac{1}{2}\overbrace{\left(t - \underbrace{2\pi i f}_{\text{konstanten premik.}}\right)}^{t'}{}^2 + 2\pi^2 f^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-2\pi^2 f^2} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t'^2}{2}} \, dt'}_{\sqrt{2\pi}} = e^{-2\pi^2 f^2}$$

Upoštevamo lastnosti funkcije Erf.



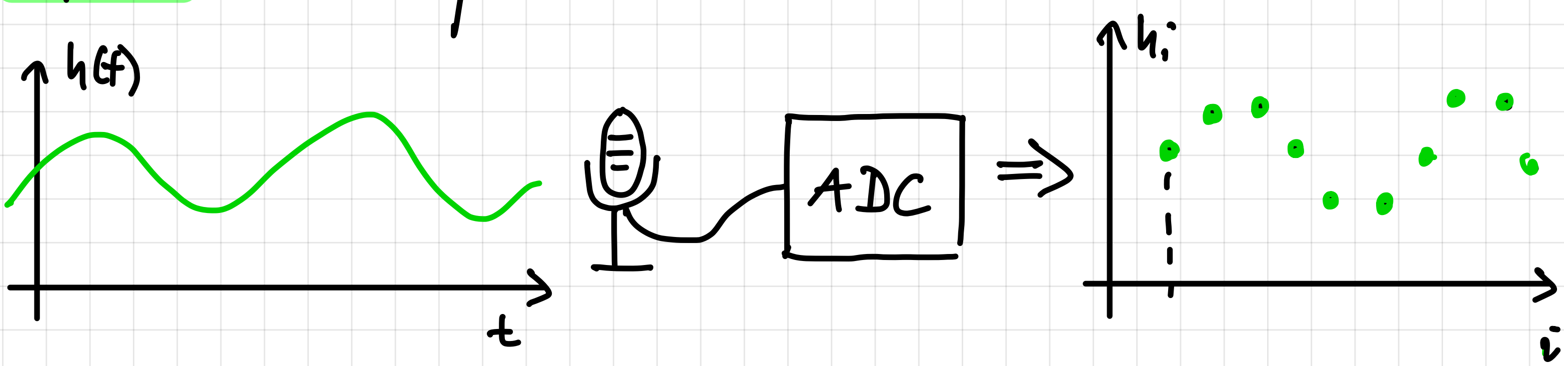
$\Longleftrightarrow$



Diskretna Fourierova transformacija:

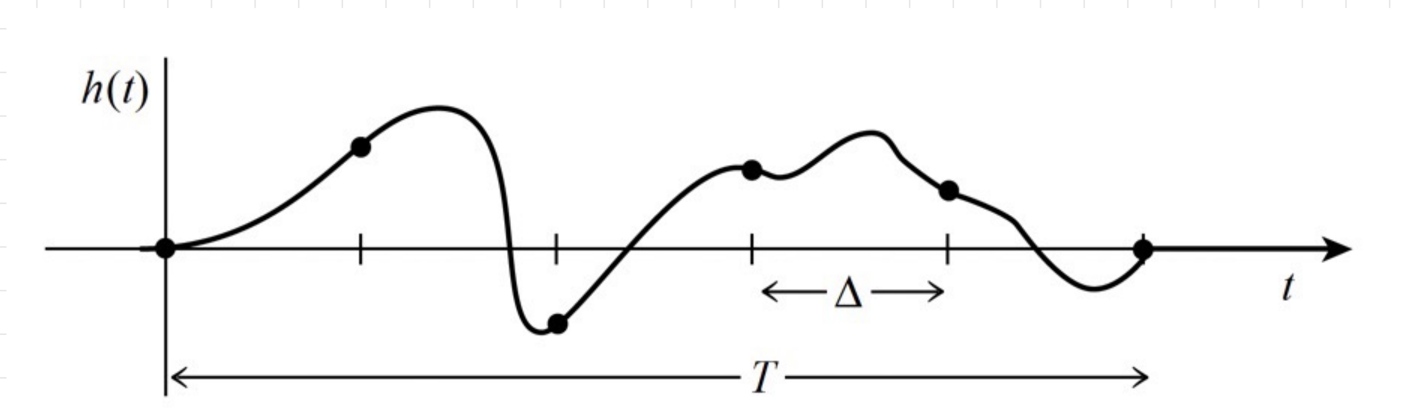
Pri analizi podatkov se navadno ne srečamo z zveznimi signali $h(t)$, pač pa z diskretnimi vzorci, ko jih dobimo tako, da signal vzorčimo v enakomernih časovnih korakih Δ.

Npr: Snemanje zvoka z zvočno kartico



Po končanem snemanju dobimo vzorce:

$$h_k = h(t_k) \quad , \quad t_k = k\cdot\Delta \quad ; \quad k = \underbrace{0,1,2,\ldots,N-1}_{N}$$



$T \equiv$ čas vzorčenja.

Frekvenca vzorčenja ("sampling rate"):

$$\nu_s = \frac{1}{\Delta}$$ (= 44.1 kHz je frekvenca vzorčenja zvoka)

Opomba: Od vzorca $\{h_k\}$ pričakujemo, da vsebuje (ujame) vse pomembne karakteristike signala $h(t)$, zato primerno izberemo Δ in T.

Število točk N, ki jih imamo v vzorcu določa, koliko informacij bomo lahko dobili iz vzorca, torej iz diskretnega niza točk $\{h_k\}$ ne bomo mogli določiti spektra $H(f)$ pri vseh frekvencah, pač pa le za diskreten niz frekvenc.

$$f_k = \frac{k}{T} = \frac{k}{N\Delta} = \frac{k \cdot \nu_s}{N} \; ; \quad k = \underbrace{0, 1, 2, 3, \ldots N-1}_{N}$$

In integral FT se prevede na končno vsoto:

$$H(f_k) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-2\pi i f_k t}\, dt \approx \sum_{n=0}^{N-1} h_n\, e^{-2\pi i f_k t} \cdot \Delta$$

Uvedemo še $H_k = \frac{1}{\Delta} H(f_k)$, potem velja:

$$H_k = \sum_{n=0}^{N-1} h_n \, e^{-2\pi i f_k t_n} = \left| \begin{array}{l} f_k = \frac{k}{N\Delta} \\ t_n = \Delta \cdot n \end{array} \right|$$

$$\boxed{H_k = \sum_{n=0}^{N-1} h_n \, e^{-2\pi i \frac{kn}{N}}}$$

Diskretna Fourierova Transformacija.

Ekvivalentno lahko sedaj zapišemo inverzno Fourierovo transformacijo:

$$f_n = \frac{n}{N\Delta}$$

$$h(t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \, e^{2\pi i f t_k} \, df \approx \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{H(f_n)}_{\cancel{\Delta} H_n} \, e^{2\pi i f_n \underset{\Delta k}{t_k}} \cdot \frac{1}{N \cancel{\Delta}}$$

$$\boxed{h(t_k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_n \, e^{2\pi i \frac{nk}{N}}}$$

Diskretna inverzna Fourierova transformacija.

Izračunajmo, kaj je $H_{N+k} = ?$

$$H_{N+k} = \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-2\pi i \frac{(N+k)n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} h_n \underbrace{e^{-2\pi i \frac{N}{\cancel{N}} n}}_{= 1 \text{ za } \forall n.} e^{-2\pi i \frac{kn}{N}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-2\pi i \frac{kn}{N}} = H_k$$

Izračunajmo enako še za inverzno F.T.

$$h_{N+k} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_n e^{-2\pi \frac{N+k}{N} n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_n e^{-2\pi \frac{kn}{N}} = h_k$$

Ugotovitev:

Diskretna Fourierova transformacija privzema, da je vzorčen signal periodičen s periodo N. Periodična s periodo N je tudi Fourierova transformiranka.

Če želimo, da reč najbolje deluje, moramo poskrbeti, da vzorčimo tako da zajamemo periodo signala. To je v praksi nemogoče doseči, tako v dobljenih spektrih vidimo popačitve. Potem bi že vedeli, kaj vzorčujemo!

Za diskretno Fourierovo transformacijo veljajo enake simetrijske lastnosti kot za zvezno F.T.

Npr., dokaz #1: Če je vzorec $\{h_k\}$ realen:

$$H_k^* = \sum_{n=0}^{N-1} h_n^* \, e^{i 2\pi \frac{kn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} h_n \, e^{-i 2\pi \frac{(-k)n}{N}} = H_{-k}$$

Kaj je pa to pravzaprav?

Izračunajmo H_{-k}:

$$H_{-k} = \sum_{n=0}^{N-1} h_n \, e^{2\pi i \frac{kn}{N}} \cdot 1 = \sum_{n=0}^{N-1} h_n \cdot e^{-2\pi i \frac{(N-k)n}{N}} = H_{N-k}$$

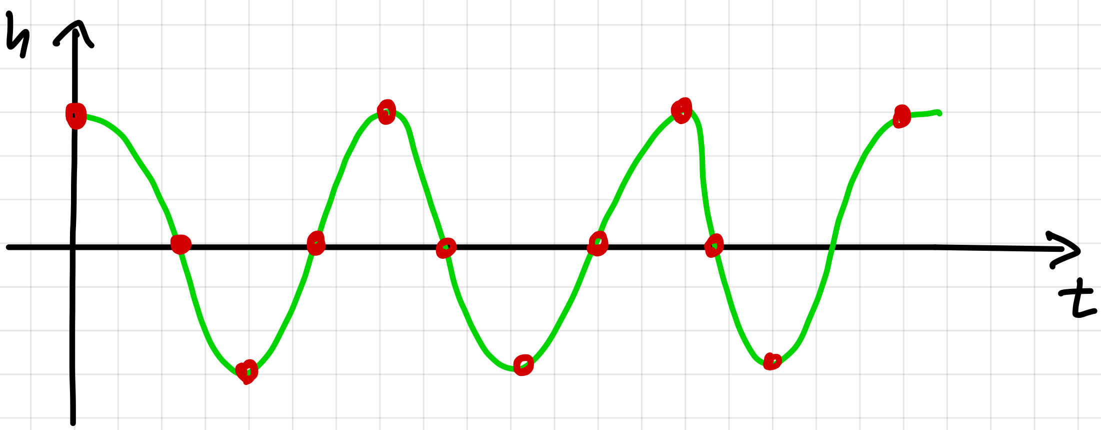
Negativne frekvence so zbrane na vrhu niza Fourierovih transformirank.

Kritična (Nyquistova) frekvenca:

V diskretno vzorčenem signalu lahko zaznamo le prispevke frekvenc, ki so manjše od kritične frekvence, ki jo določa korak vzorčenja Δ. Prispevke frekvenc, ki so višje od kritične frekvence ne prepoznamo več:

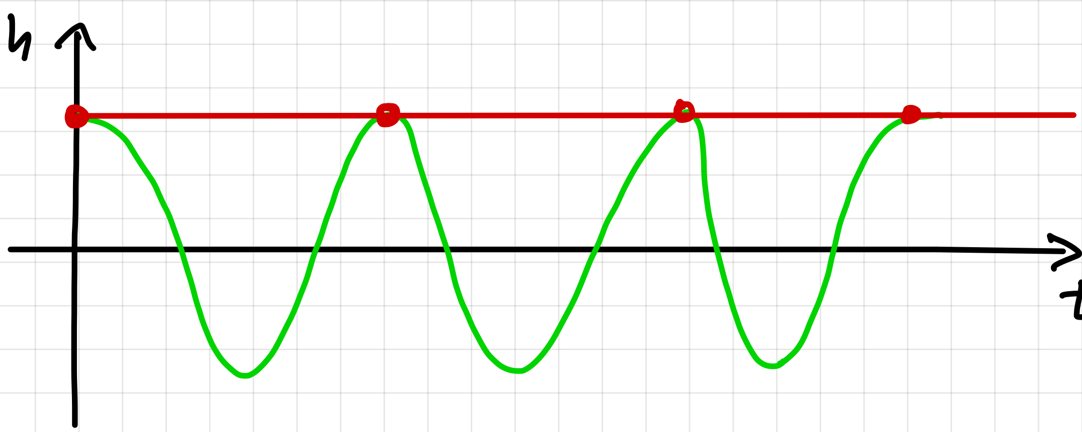
$\nu < \nu_s$!

Celotnem signal lepo prepoznamo!



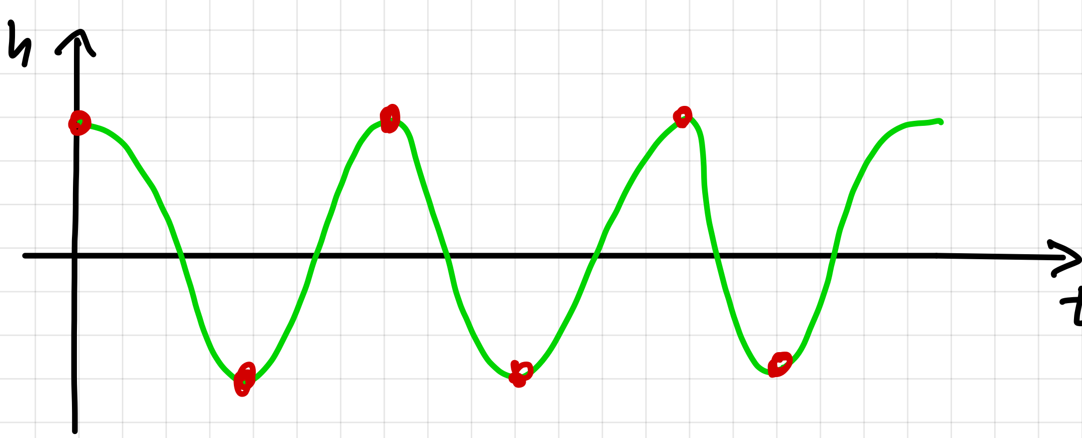
$\nu \geq \nu_s$

Celotnega ne prepoznamo



$\nu = \frac{\nu_s}{2}$

Komaj da še prepoznamo oscilacijo!



Kritična frekvenca f_c upeljemo kot frekvenco, pri kateri imamo pri vzorčenju/zajemanju s frekvenco $f = f_c$ dva vzorca na periodo.

$$\boxed{f_c = \frac{1}{2} f_s = \frac{1}{2\Delta}}$$

Kritična ali Nyquistova frekvenca!

Upoštevajmo še:

$$f_c = \frac{n_c}{N\Delta} = \frac{1}{2\Delta} \Rightarrow n_c = \frac{N}{2}$$

Ugotovitev: Kritična frekvenca je na $\frac{1}{2}$ diskretnega niza frekvenc. Drugi del niza pripada negativnim frekvencam na enakem absolutnem razponu! (To bomo še videli!)

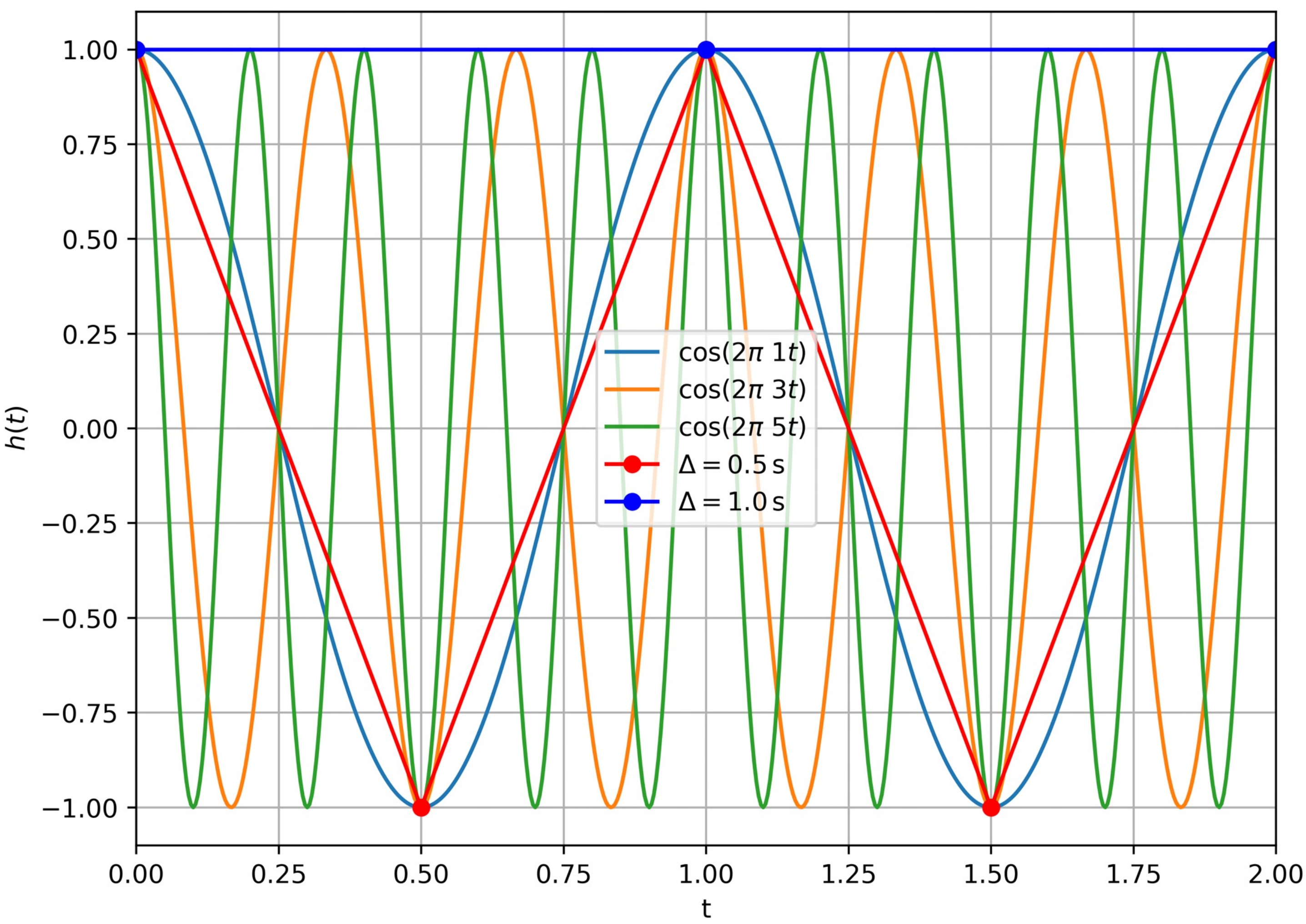
Še prvi:

$H_0 \equiv$ konstantni (DC) člen.

H_k ; $k = 1, 2, \ldots, \frac{N}{2} - 1$
členi, ki pripadajo pozitivnim frekvencam.

H_k ; $k = \frac{N}{2}, \ldots, N-1$, členi, ki pripadajo negativnim frekvencam.

Računalniški zgled: (FFT Aliasing 2.)



Velja:

Enako velja tudi za h_m.

$$H_{-\frac{N}{2}} = H_{N-\frac{N}{2}} = H_{\frac{N}{2}}$$

$$H_0 = H_N \quad \text{(konstanten, DC člen)}$$

$$H_{-k} = H_{N-k}\ ; \quad k = 1, 2, \dots, \tfrac{N}{2}-1$$

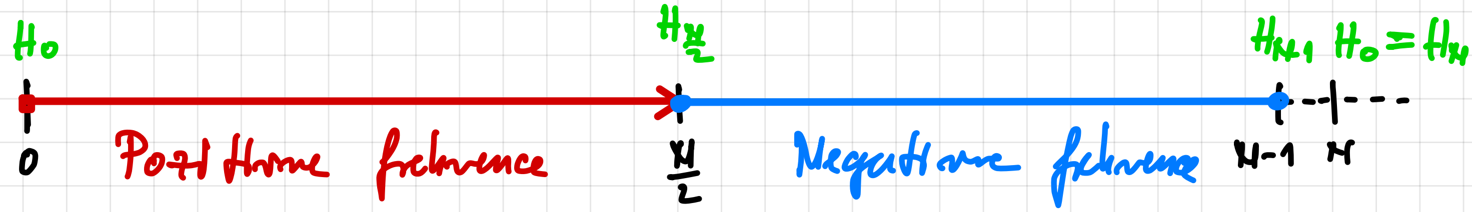
DFT lahko prepišemo v bolj razumno obliko, v smislu po pozitivnih in negativnih frekvencah:

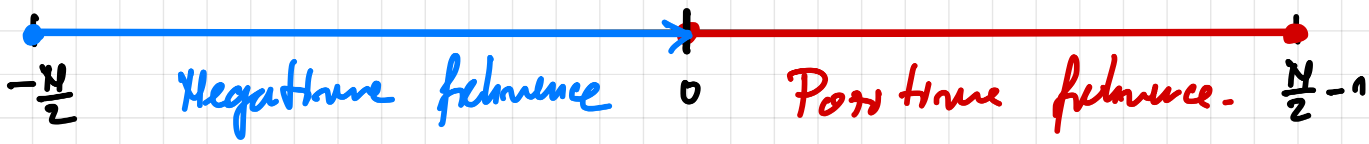
$$h_k = \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} H_m\, e^{+2\pi i \frac{mk}{N}}}_{\text{Algoritem nam navadno da rezultat v tej obliki.}} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N/2-1} H_m\, e^{+2\pi i \frac{mk}{N}} + \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{m=\frac{N}{2}}^{N-1} H_m\, e^{+2\pi i \frac{mk}{N}}}_{\text{spremenimo indeks po katerem seštevamo!}}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N/2-1} H_m\, e^{+2\pi i \frac{mk}{N}} + \frac{1}{N}\sum_{m=-\frac{N}{2}}^{-1} \underbrace{H_{N+m}}_{H_{+m}}\ \underbrace{e^{+2\pi i \frac{(N+m)k}{N}}}_{e^{+2\pi i \frac{mk}{N}}}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N/2-1} H_m\, e^{2\pi i \frac{mk}{N}} + \frac{1}{N}\sum_{m=-\frac{N}{2}}^{-1} H_m\, e^{2\pi i \frac{mk}{N}}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} H_m\, e^{2\pi i \frac{mk}{N}}$$





Realni signali:

$$h_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N/2-1} H_n e^{2\pi i \frac{nk}{N}} + \frac{1}{N}\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{-1} H_n e^{2\pi i \frac{nk}{N}}$$

$$h_k^* = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} H_n^* e^{-2\pi i \frac{nk}{N}} + \frac{1}{N}\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{-1} H_n^* e^{-2\pi i \frac{nk}{N}} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} H_n^* e^{2\pi i \frac{\overset{n'}{(-n)}k}{N}} + \frac{H_0^*}{N} + \frac{1}{N}\sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{-1} H_n^* e^{2\pi i \frac{\overset{n'}{(-n)}k}{N}} + \frac{H_{-\frac{N}{2}}}{N} e^{+2\pi i \frac{N/2}{N}}$$

Vpeljemo nove vsote po $n' = -n$:

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} H_{-n}^* e^{2\pi i \frac{nk}{N}} + \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{-1} H_{-n}^* e^{2\pi i \frac{nk}{N}}}_{\frac{1}{N}\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{-1} H_n e^{2\pi i \frac{nk}{N}}}$$

Pri realnih signalih:

Ugotovitev:

Pokazali smo (kot že prej pri simetrijskih lastnostih), da je $H_n^* = H_{-n}$. To pomeni, da pri realnih signalih negativne frekvence ne nosijo nobene dodatne informacije. Vse informacije so skrite v kompleksnih členih pri pozitivnih frekvencah.

Če imamo N realnih točk, lahko o to informacijo napolnimo $\frac{N}{2}$ kompleksnih točk. To so potem ravno členi pri pozitivnih frekvencah.

Zgled:

$$\cos(2\pi f_k t) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} e^{2\pi i f_k t} + \frac{1}{2} e^{-2\pi i f_k t}$$

$$f_k = \frac{k}{N}\frac{1}{\Delta}$$

$$h_k = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} \underbrace{\frac{1}{2}}_{H_k} \delta_{m,k} e^{+2\pi i \frac{km}{N}} + \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{-1} \underbrace{\frac{1}{2}}_{H_{-k}} \delta_{m,-k} e^{+2\pi i \frac{km}{N}}$$

Informacija, ki jo spravimo v signal je ena realna frekvenca. Ta dva kompleksna člena v DFT, <u>ki pa sta intimno povezana!</u>

V diskretni obliki znamo potem prepisati tudi Parsevalovo enačbo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 \, df$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} |h_n|^2 \cancel{\Delta} = \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{|H(f_n)|^2}_{H_n^2 \cancel{\Delta^2}} \cdot \frac{1}{\cancel{\Delta} N}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N-1} |h_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_n^2} \equiv \text{"Skupna Moč"}$$

Spektralna gostota moči:

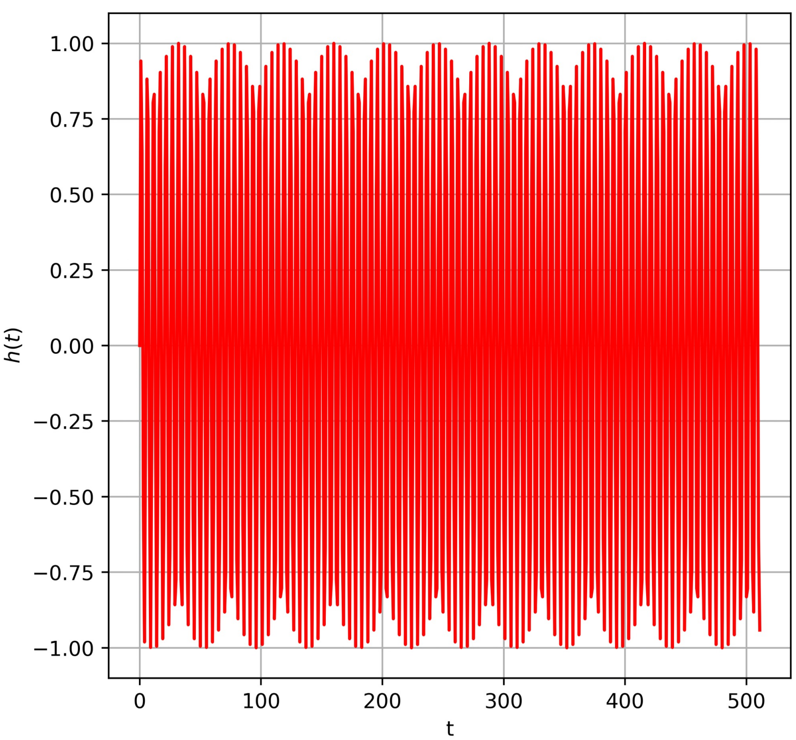
Navadno nas zanima, koliko "moči" je v posamezni frekvenci f_k (ali v zveznem primeru na intervalu $[f, f+df]$. Tedaj nas ne zanima lociranje na pozitivne ali negativne frekvence, pač pa nas zanima moč pri absolutnih vrednostih frekvenc, torej za frekvence na intervalu od 0 do f_N (oz. ∞). To pride še posebej do izraza pri realnih signalih, kjer v negativnih frekvencah ni shranjene nobene dodatne informacije. Tedaj vpeljemo spektralno gostoto moči (ang. Power spectral density $\equiv$ PSD). V primeru sodega števila točk N jo izračunamo kot:

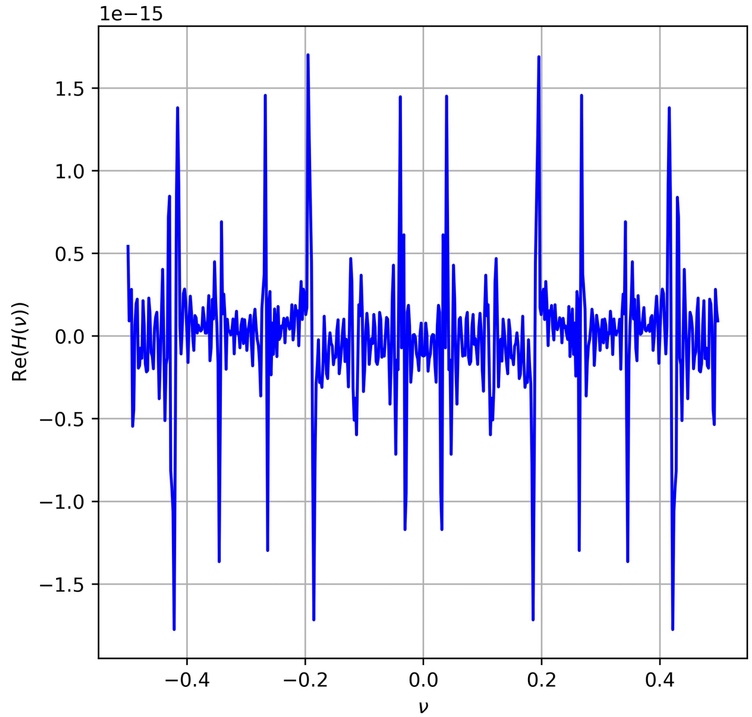
$$\boxed{\begin{aligned} P_0 &= |H_0|^2 \\ P_k &= \frac{1}{2}\left(|H_k|^2 + |H_{N-k}|^2\right); \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}-1 \\ P_{\frac{N}{2}} &= |H_{N/2}|^2 \end{aligned}}$$

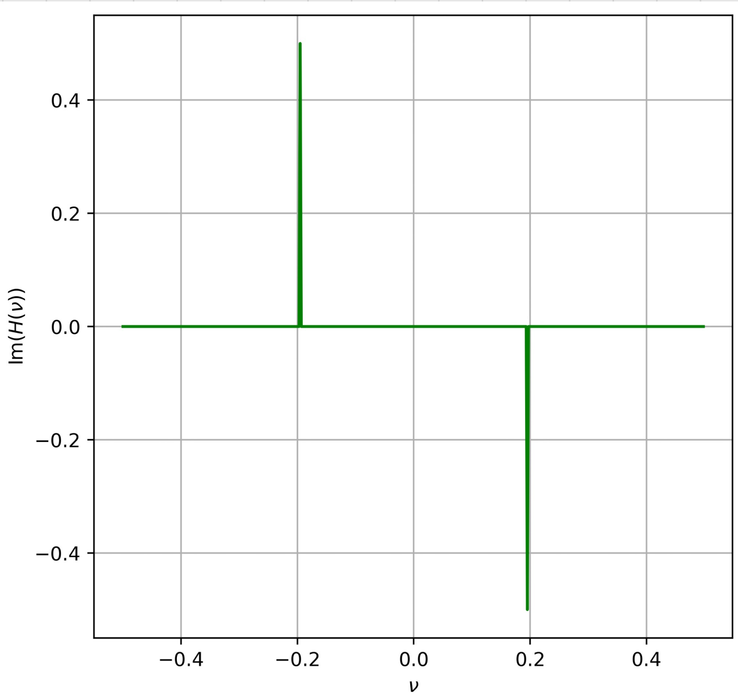
Enostranska spektralna gostota moči.

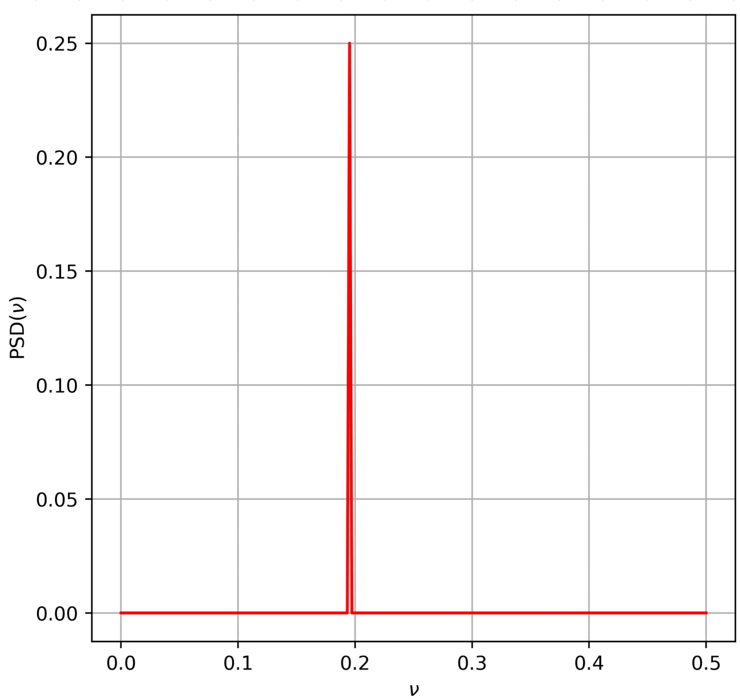
Računalniški zgled: (FFT zgled 1)

Sinusni signal z eno frekvenco!



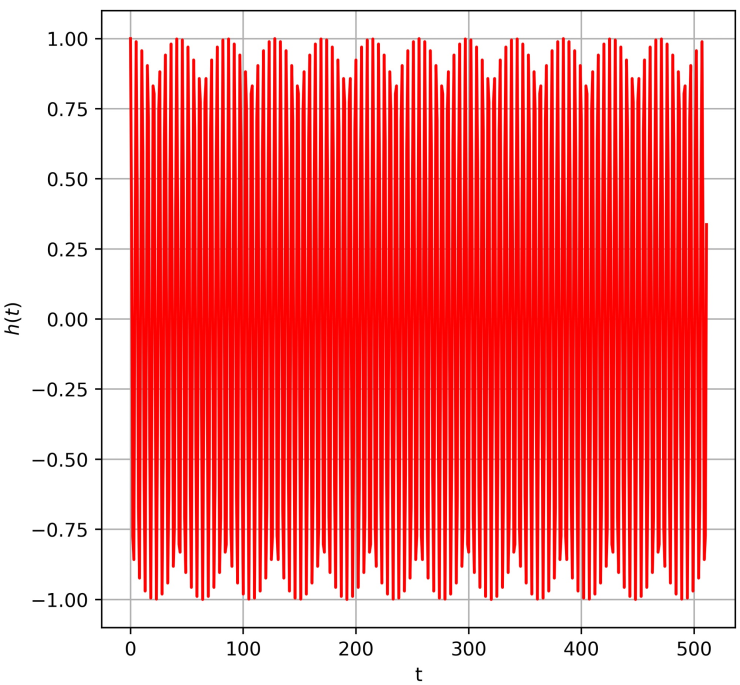


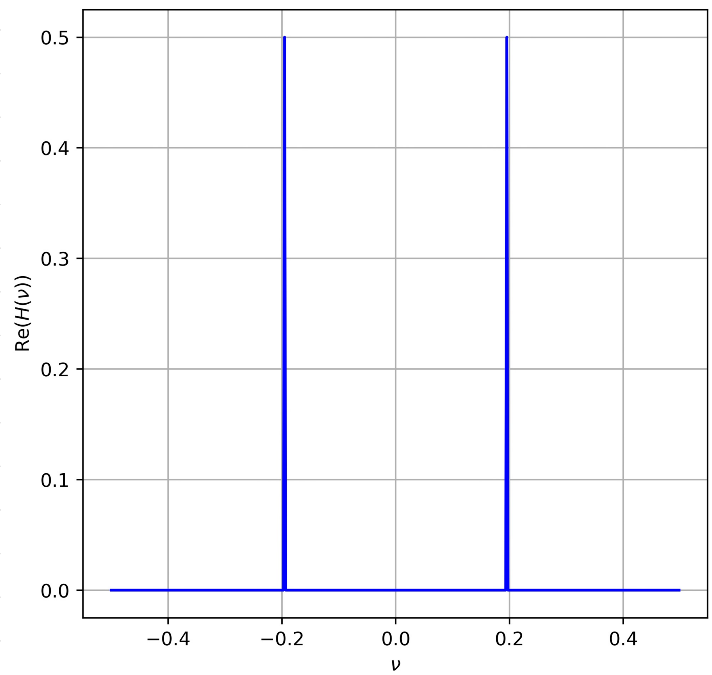


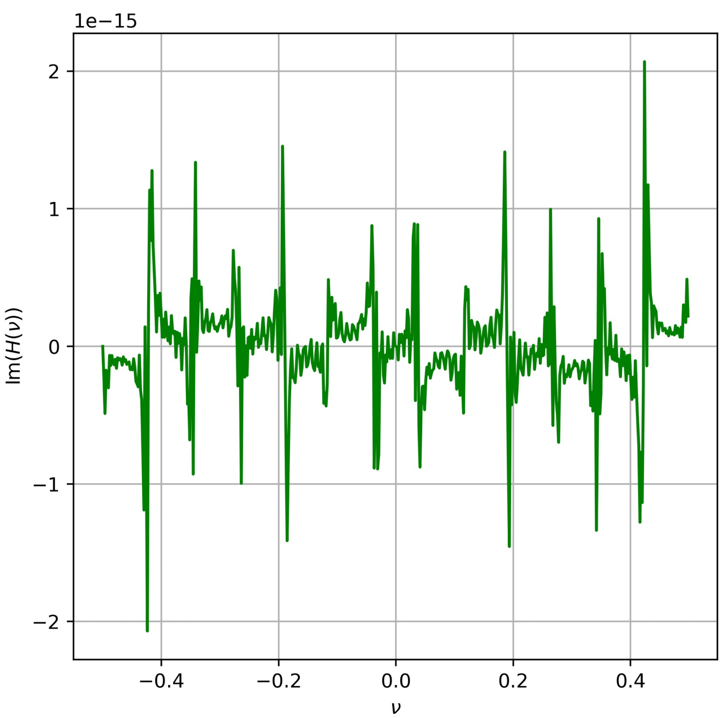


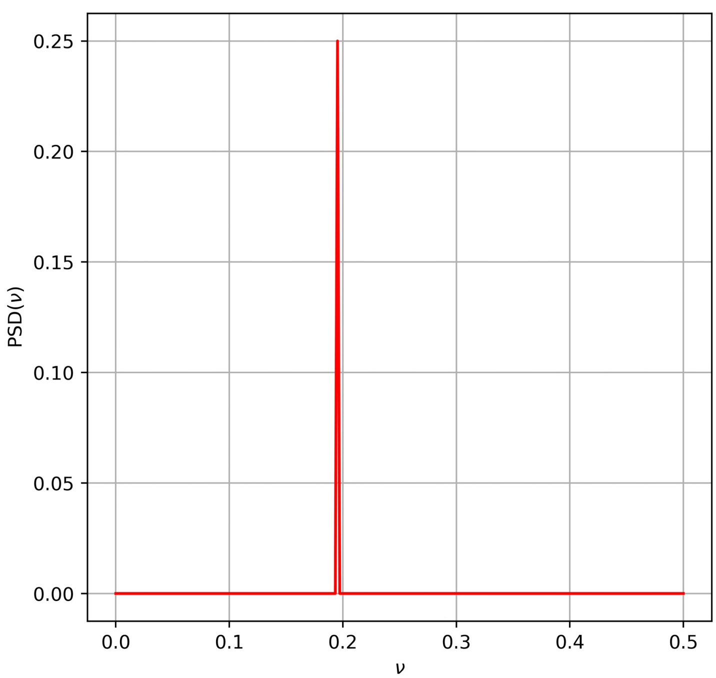
Računalniški zgled: (FFT zgled 2)

Kosinusni signal z eno frekvenco!



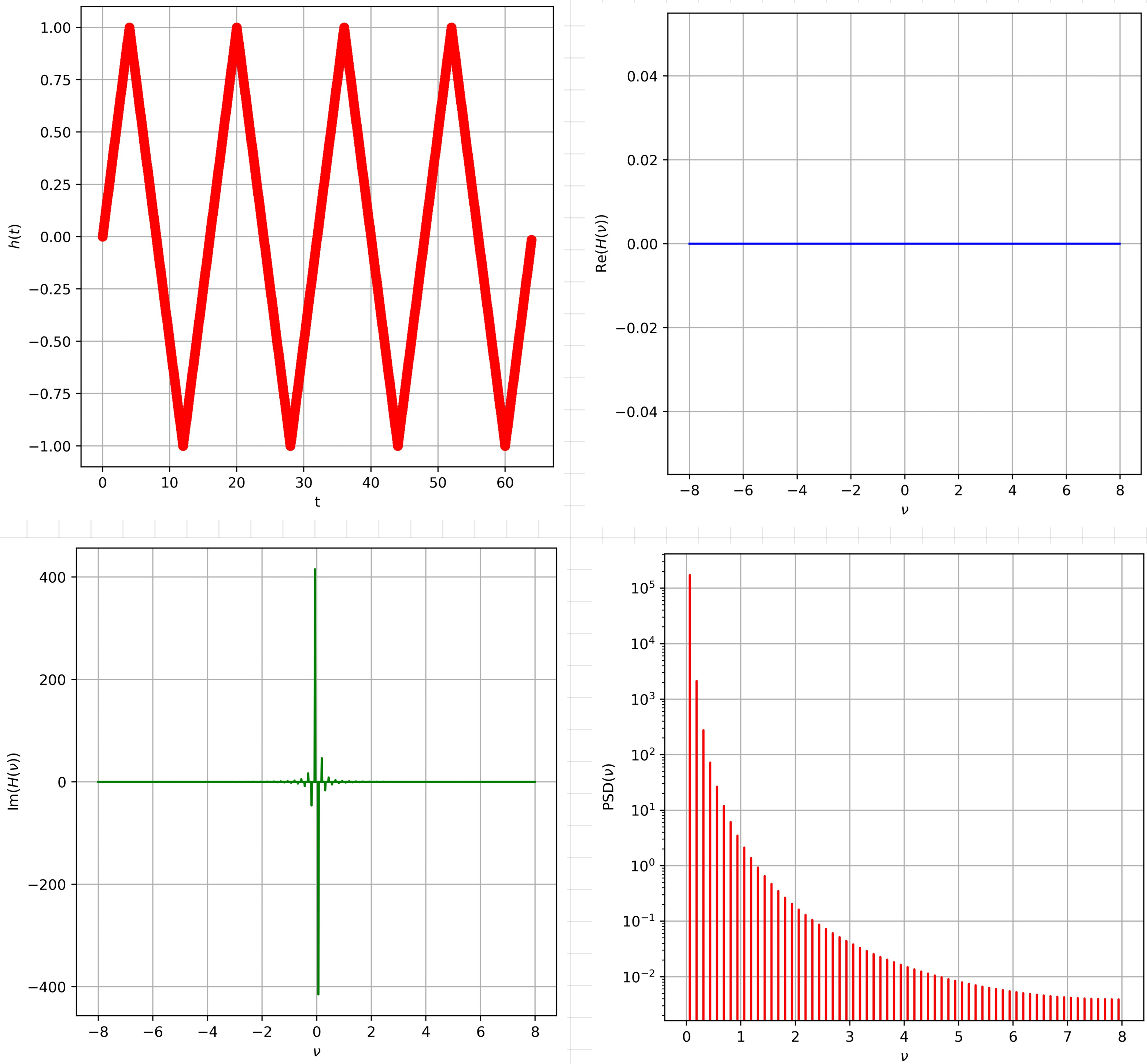






Računalniški zgled #2 (FFT zgled 5)

Trikotni signal



Posledica #1: Sledi iz Teorema o vzorčenju, ki pravi, da če zvezno funkcijo $h(t)$ vzorčimo s časovnim korakom Δ, in je ta funkcija taka, da vsebuje le posamezne frekvence, ki so manjše od $f < f_c = \frac{1}{2\Delta}$ oziroma je $H(f) = 0$, za $\forall f \geq f_c$, potem je funkcija $h(t)$ v celoti določena z vzorci $\{h_n\}$. To pomeni da:

- Če je ta pogoj izpolnjen, potem z vzorčenjem in z diskretno Fourierovo transformacijo ne izgubimo nobene informacije.

- Količina informacij, ki jo vsebuje signal s končno pasovno širino je neskončno krat manjša od količine informacij, ki jih vsebuje signal z zveznim frekvenčnim spektrom!

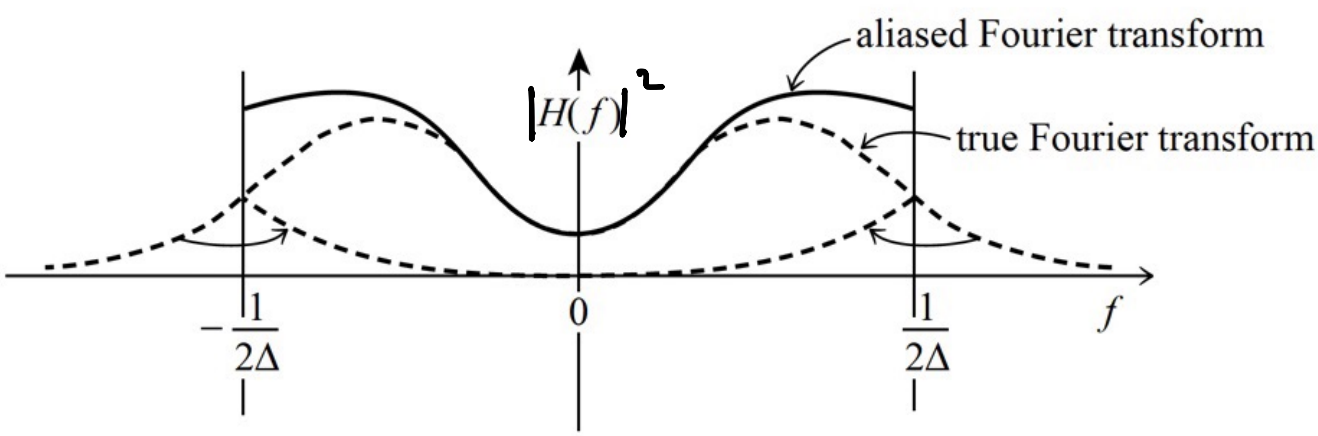
- Če imamo nek frekvenčni signal, ki ima končno pasovno širino, potem vzorčenje nastavimo na tako visoko frekvenco, da pokrijemo celoten spekter.

Posledica #2: Potujitev (ang Aliasing)

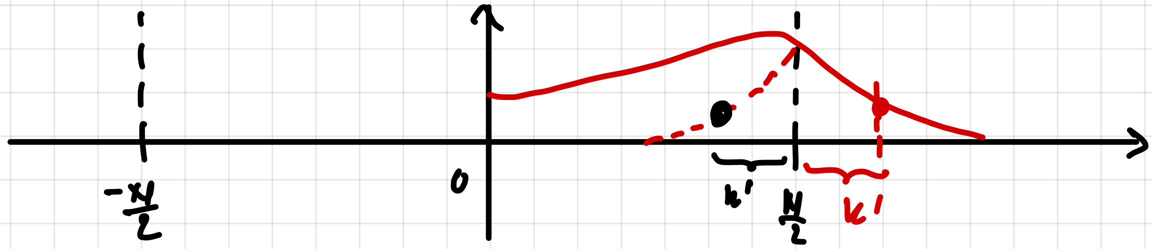
Če vzorčimo realen signal! signal, ki vsebuje frekvenčne komponente, ki segajo preko kritične frekvence f_c, se izkaže, da se del frekvenčnega spektra, ki leži zunaj intervala $-f_c < f < f_c$ prenese znotraj območja in popači rekonstruirani spekter. Preslikava se zgodi tako, da se zrcali del spektralne gostote moči $|H|^2$ preko kritične frekvence zrcalno v območje $(-f_c, f_c)$. Frekvence f nad f_c se potem pojavijo pri potujenih frekvencah:

$$f' = 2f_c - (f \bmod f_s) = f_s - (f \bmod f_s)$$

Ta pojav imenujemo potujitev in je posledica vzorčenja.



Dokaz:



$$H_{k'+\frac{N}{2}} = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} h_n e^{-2\pi \frac{n}{N}\left(k'+\frac{N}{2}\right)} \cdot 1 = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} h_n e^{-2\pi \frac{n}{N}\left(k'+\frac{N}{2}-N\right)}$$

$$= \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} h_n e^{+2\pi \frac{n}{N}\left(\frac{N}{2}-k'\right)} = H^*_{\frac{N}{2}-k'}$$

če $h = h^*$

Od tod sledi: (velja tudi: $H^*_{k'+\frac{N}{2}} = H_{\frac{N}{2}-k'}$)

$$|H_{\frac{N}{2}+k'}|^2 = H_{\frac{N}{2}+k'} H^*_{\frac{N}{2}+k'} = H^*_{\frac{N}{2}-k'} H_{\frac{N}{2}-k'} = |H_{\frac{N}{2}-k'}|^2$$

Kako zaobiti problem potujitve:

- Poznamo mogočo pasovno širino signala.
- Uporabimo analogni nizkopasovni filter, ki poreže visoke frekvence, nato pa vzorčimo vsaj z 2x največje frekvence, ki je prepuščena s filtrom.

Primer: Digitalni zapis zvoka:

Zvok slišimo do frekvence 20kHz. Pred snemanjem zvok opustimo skozi analogni filter, ki poreže frekvence nad 20kHz. Filter se zapre v nekaj kHz. Da bi se ognili aliasingu zato potem zvok za filtrom vzorčimo s frekvenco $2 \cdot 20\,kHz = 40\,kHz$. Točna vzorčevalna frekvenca zvoka je 44.1kHz.

Zgled:

Sinusni signal s frekvenco $f = 4\,Hz$ vzorčimo s korakom $\Delta = 0.2\,s$ in zajamemo $N = 32$ vzorcev. Pri kateri frekvenci bomo videli vrh, ko bomo naredili DFT?

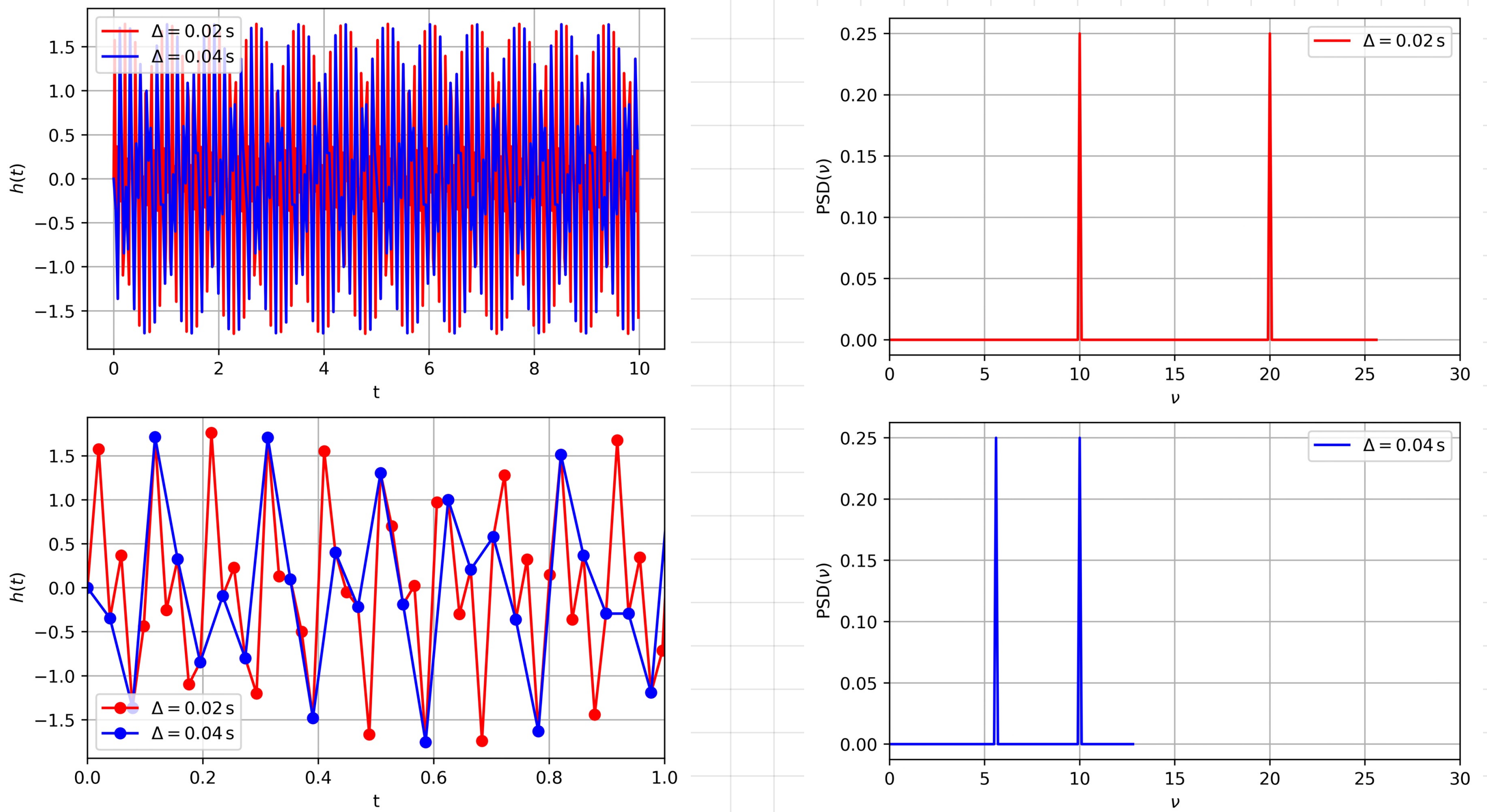
$$f_s = \frac{1}{\Delta} = 5\,Hz$$

$$f_c = \frac{1}{2\Delta} = 2.5\,Hz$$

$$f > f_c \quad \text{in} \quad f < f_s \quad \Rightarrow$$

$$f' = f_s - f = 5\,Hz - 4\,Hz = \underline{\underline{1\,Hz}}$$

Računalniški zgled: (FFT Aliasing)



Posledica #3: Puščanje (ang. Leakage)

Diskretna Fourierova transformacija predpostavlja, da je vzorčena funkcija periodična s periodo $T = N\Delta$ in da velja $h_N = h_0$.

Če je funkcija periodična s periodo T, potem vemo, da vsebuje le frekvence:

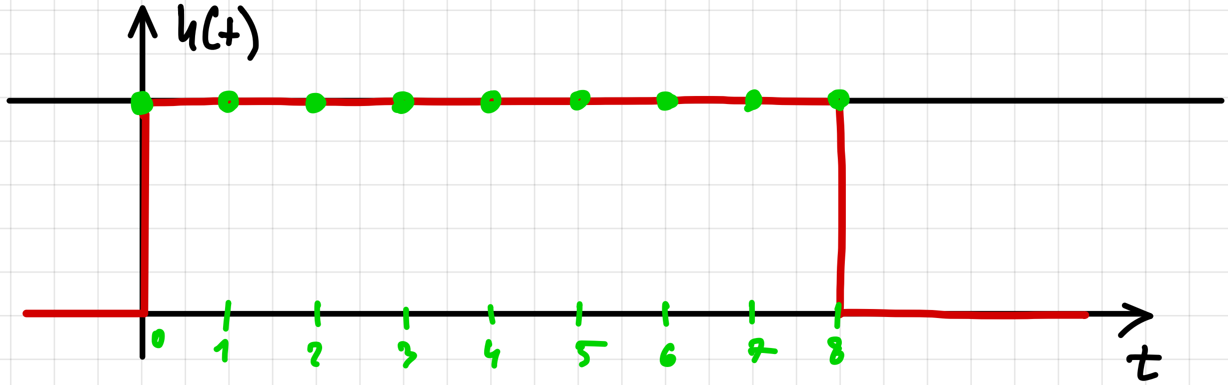
$$f_n = \frac{n}{T}.$$

Če vzamemo, da je $N\Delta = mT$, $m \in 1, 2, 3, \ldots$, potem dosežemo, da se diskretne frekvence DFT eksaktno ujemajo s pravimi frekvencami in spekter so ostri.

Če pa se frekvenčne komponente signala ne ujemajo z diskretnimi frekvencami DFT, pa se frekvenčne amplitude H_k razmažejo. To imenujemo puščanje.

Pri analizi dejanskih signalov navadno opazujemo le en del signala in na tem delu navadno ne moremo zagotavljati, da je periodičen.
Posledično se moramo spopadati s puščanjem.

Izgled:



DFT:

$$H_k = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{kn}{N}} = \frac{1 - e^{-2\pi i \frac{k\cancel{N}}{\cancel{N}}}}{1 - e^{-2\pi i \frac{k}{N}}} =$$

Uporabimo pravilo za geometrijsko vrsto:

$$\sum_{n=L}^{U} r^n = \frac{r^L - r^{U+1}}{1-r}$$

$$= \frac{e^{-\pi i k}\left(e^{\pi i k} - e^{-\pi i k}\right)}{e^{-\pi i \frac{k}{N}}\left(e^{\pi i \frac{k}{N}} - e^{-\pi i \frac{k}{N}}\right)} = e^{-i\pi k\left(1-\frac{1}{N}\right)} \cdot \frac{\sin \pi k}{\sin \pi \frac{k}{N}}$$

Gledamo raje spektralno gostoto:

$$|H_k|^2 = \left[\frac{\sin \pi k}{\sin \pi \frac{k}{N}}\right]^2$$

Funkcija ima glavni vrh in veliko stranskih vrhov pri razlikah f_1, ki povzročajo puščanje.

$|H|^2$

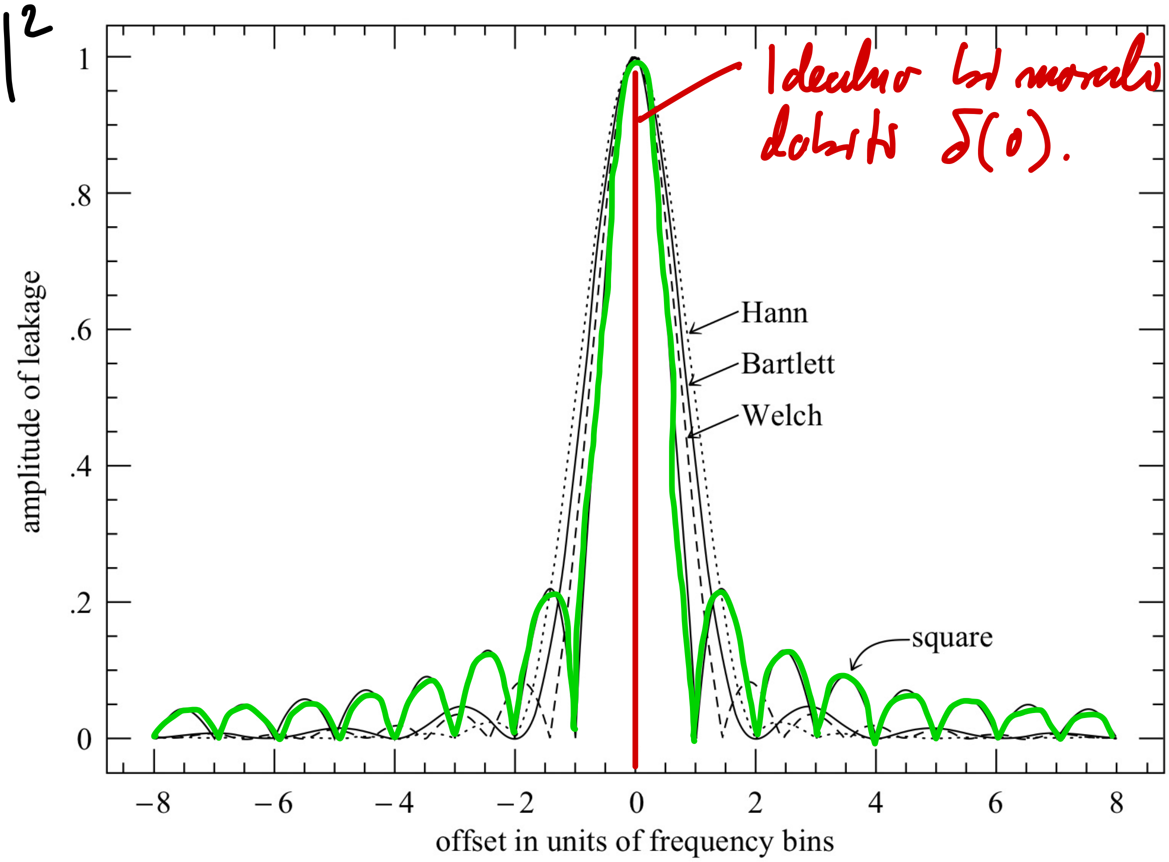


Figure 13.4.2. Leakage functions for the window functions of Figure 13.4.1. A signal whose frequency is actually located at zero offset "leaks" into neighboring bins with the amplitude shown. The purpose of windowing is to reduce the leakage at large offsets, where square (no) windowing has large sidelobes. Offset can have a fractional value, since the actual signal frequency can be located between two frequency bins of the FFT.

Okenske funkcije:

Puščanje zmanjšamo tako, da signal namesto s kvadratno funkcijo (glej zgoraj) pomnožimo z neko drugo funkcijo, ki z naraščajočo $|f|$ bolj gladko pada proti 0 in zmehča ostre robove stopnice, ki povzročijo puščanje. Z okenskimi funkcijami zmanjšamo puščanje, a poslabšamo ločljivost!

Spomni se Praktikum 6, Fourierova spektroskopija!

Okenske funkcije postavko podamo v točkah:

$w(t) \longrightarrow \{w_k\}_{k=0}^{N-1}$. Ko naš signal pomnožimo z okensko funkcijo, dobimo modificirano F.T.

$$\tilde{H}_k = \sum_{n=0}^{N-1} h_n w_n e^{-2\pi i \frac{nk}{N}} \quad ; \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

Spektralno gostoto moči pa potem izračunamo kot:
(Glej NRC, str. 553)

$$P_0 = \frac{1}{W} |H_0|^2$$

$$P_k = \frac{1}{W} \left(|H_k|^2 + |H_{N-k}|^2 \right) \; ; \; k = 1, 2, \ldots, \frac{N}{2} - 1$$

$$P_{\frac{N}{2}} = \frac{1}{W} |H_{N/2}|^2$$

kjer je:

$$W = \sum_{n=0}^{N-1} w_n^2$$

Okenske funkcije, ki se najbolj uporabljajo:

- Hannovo okno:

$$w_k = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)\right]$$

- Bartletovo okno:

$$w_k = 1 - \left|\frac{k - \frac{1}{2}N}{\frac{1}{2}N}\right|$$

- Welchevo okno:

$$w_k = \left(1 - \frac{k - \frac{1}{2}N}{\frac{1}{2}N}\right)^2$$

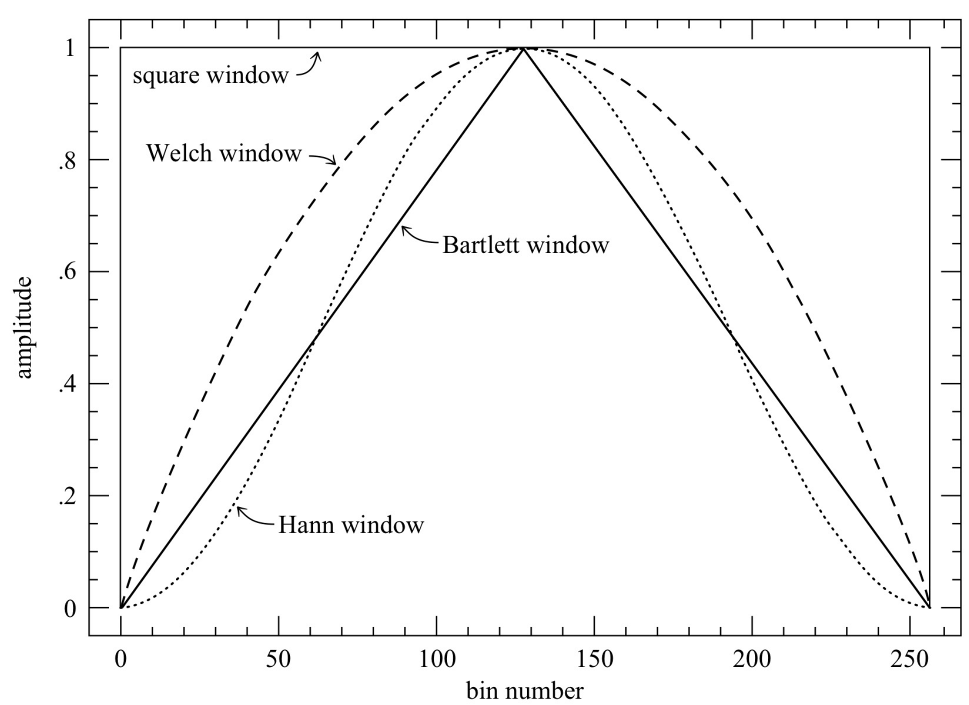
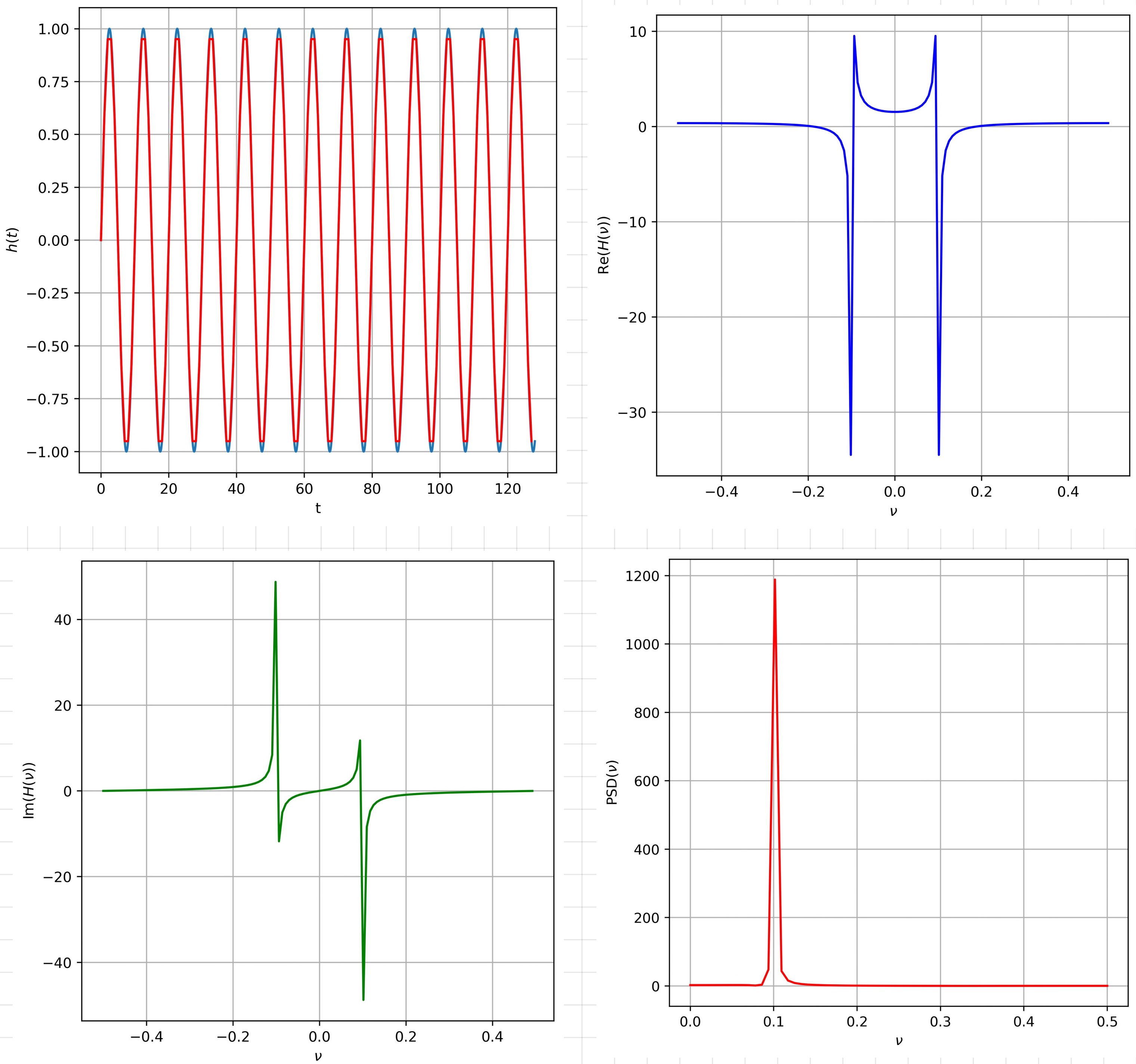


Figure 13.4.1. Window functions commonly used in FFT power spectral estimation. The data segment, here of length 256, is multiplied (bin by bin) by the window function before the FFT is computed. The square window, which is equivalent to no windowing, is least recommended. The Welch and Bartlett windows are good choices.

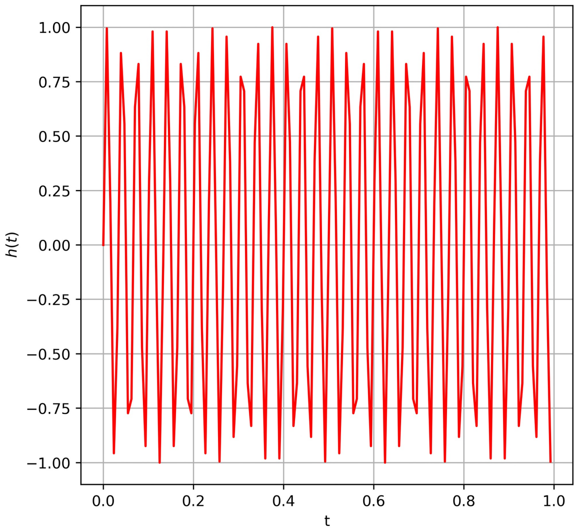
Računalniški zgled: (FFT zgled 3)

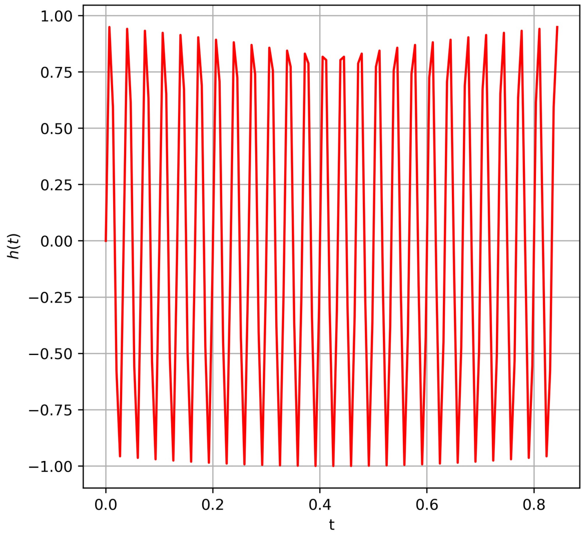
Aliasing.

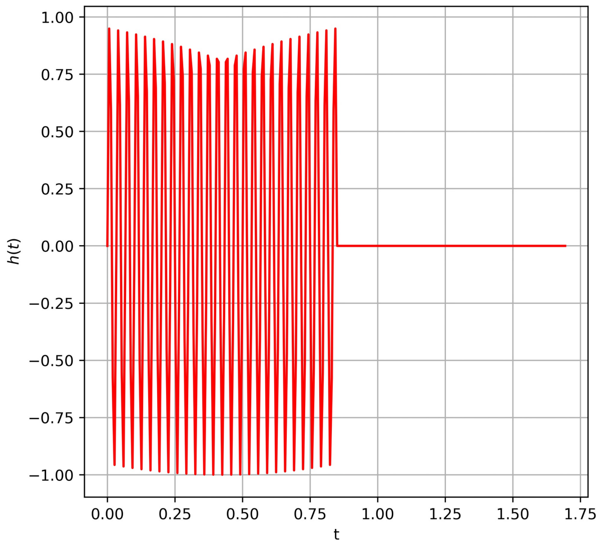


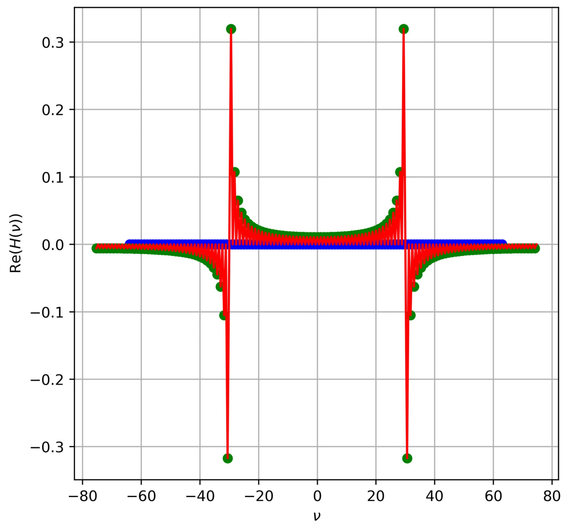
Računalniški zgled: (FFT Leakage 3)

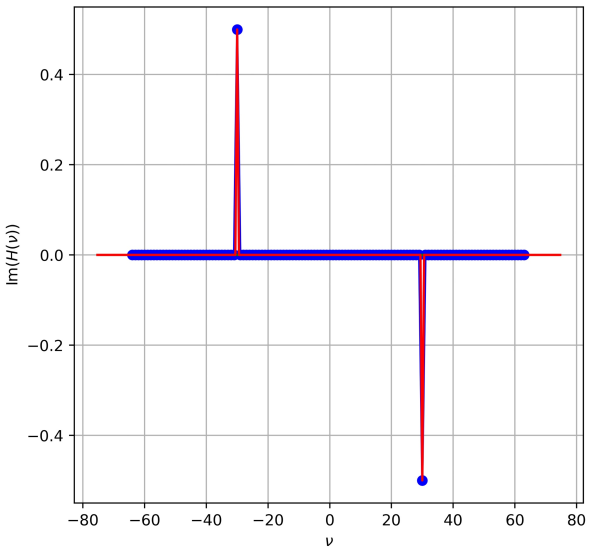
Zero padding

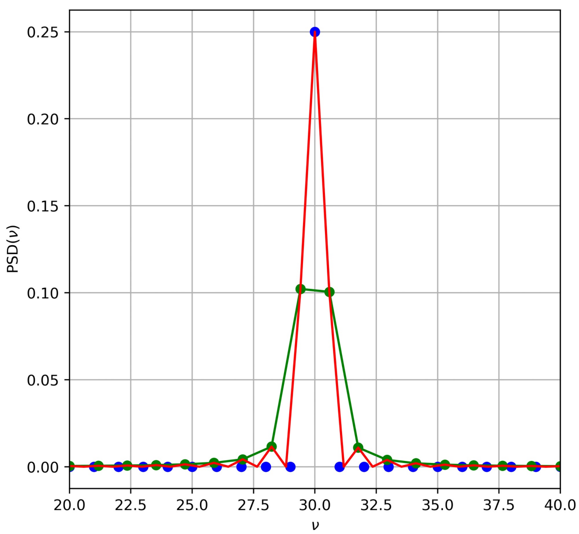












Razumevanje DFT:

Vpeljemo kompleksno število: $w = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$.

Potem lahko diskretno Fourierovo transformacijo zapišemo v obliki:

$$H_k = \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-2\pi i \frac{kn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} W_{kn} h_n$$

Kjer ima matrika W_{kn} obliko:

$$W_{kn} = \begin{bmatrix} w^{0\cdot 0} & w^{0\cdot 1} & w^{0\cdot 2} & \cdots \\ w^{1\cdot 0} & w^{1\cdot 1} & w^{1\cdot 2} & \cdots \\ w^{2\cdot 0} & w^{2\cdot 1} & w^{2\cdot 2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

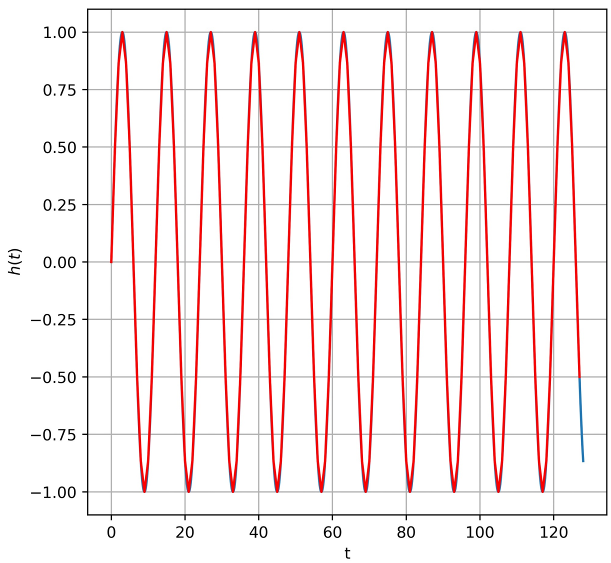
Zapišemo še: $\vec{H} = [H_0, H_1, \ldots\ldots, H_{N-1}]$

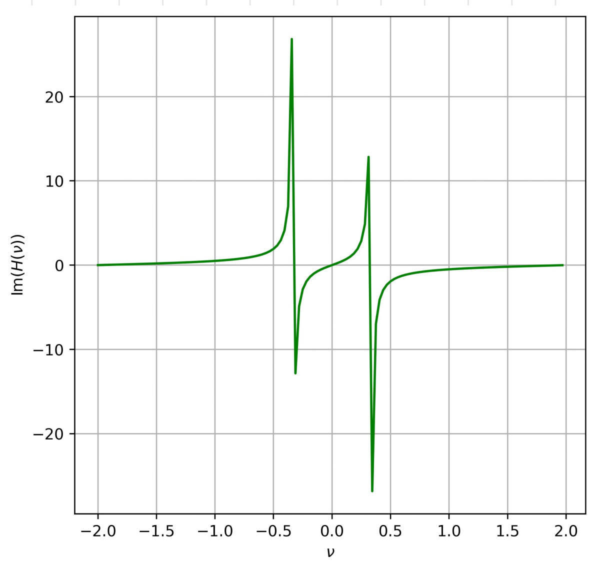
in $\vec{h} = [h_0, h_1, \ldots\ldots, h_{N-1}]$. Potem velja:

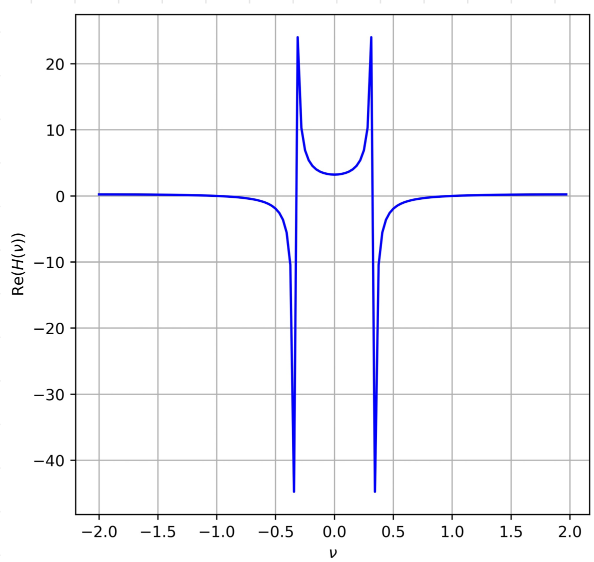
$$\boxed{\vec{H} = W\vec{h}}$$

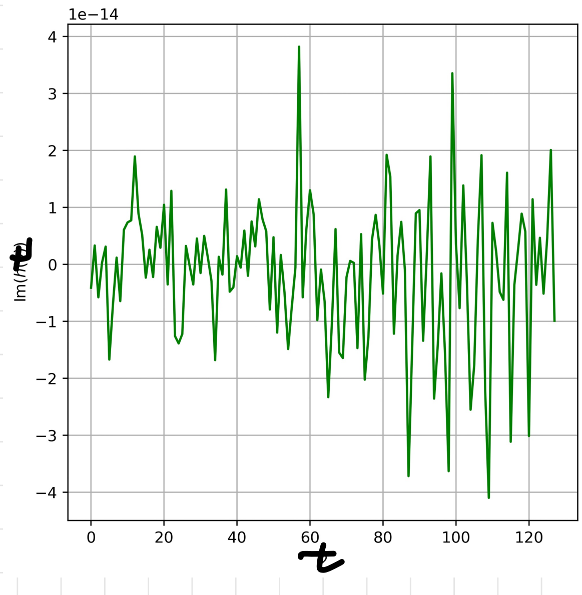
Računalniški zgled: (DFT Basic 1)

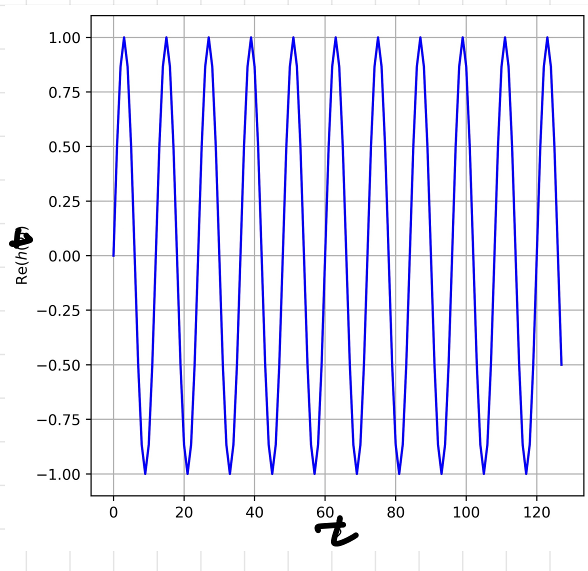
Računanje na roko.











Problem računanja DFT smo prevedli na množenje vektorja z matriko, kar ima časovno zahtevnost $O(N^2)$. To je časovna zahtevnost osnovnega algoritma DFT.

Danes tako ne računamo več. Uporabljamo takoimenovano Hitro Fourierovo transformacijo (angl. Fast Fourier Transform). Ti algoritmi imajo časovno zahtevnost $O(N \log_2 N)$ in so precej hitrejši.

Osnovni FFT algoritem je algoritem J.W. Cooleya in J.W. Tukeya, ki temelji na principu "deli in vladaj". Niz $\{h_k\}$ za katerega želimo izračunati DFT postopoma delimo na podnize. In si s tem zmanjšujemo količino potrebnega dela. V vsakem koraku delimo niz na niz z lihimi in sodimi indeksi. Zaradi zaporednih delitev na dva dela, mora biti dolžina niza $N = 2^P$.

Za več glej Širca, RMF, str. 162 in NRC, str. 504.

Če imamo niz drugačne dolžine, ga dopolnimo z ničlami do dolžine 2P. Ta postopek imenujemo zero padding.

Opomba: Ničle dodajamo tudi tedaj, ko želimo navidez izboljšati ločljivost spektra.
(Glej lastnosti Teorema vzorčenja)
Ničle dodajamo vedno na konec zaporedja!